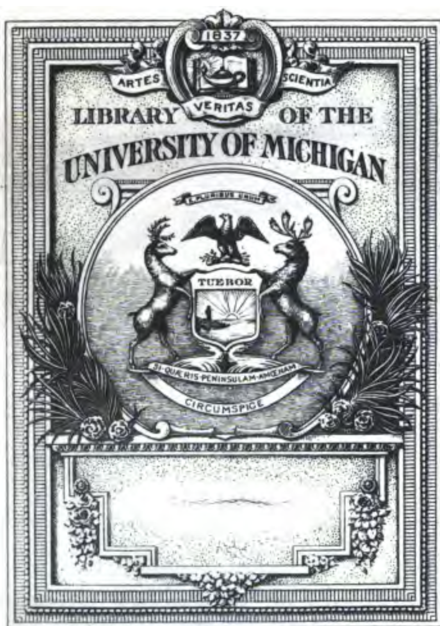

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

EVCLIDIS ELEMENTORVM SEX LIBRI PRIORES DEMONSTRATI

ab

HENRICO COETSIO

MATHES: LECTORE



£1. 6.
1742.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
SEX
LIBRI PRIORES

Magnam partem novis demonstrationibus

ADORNATI

OPERA & STUDIO

HENRICI COETSII.

In Academia Lugd: Batava Matheseos Lectoris.

Editio secunda, a priori multum diversa.



AMSTELODAMI,

Ex Officina HENRICI & Viduæ THEODORI BOOM. Aº 1705.

ILLVSTRISSIMIS, NOBILISSIMIS

VIRIS

CELEBERRIMÆ ACADEMIÆ
LVGDVNO-BATAVÆ

CVRATORIBVS

D: D: JACOBO

BARONI de WASSENAER,

Toparchæ in Opdam, Hensbroeck, Wochmeer, Spierdijck, Zuydwijck, Kernchem, Twickelo, Lage &c. Nobilium Hollandiæ Primo, Equestri Elephantis Ordini adscripto; Militiæ Equestris Belgicæ Generali. Munitissimæ civitatis Sylvæ Ducis Gubernatori. Ad plures Europæ Reges ac Principes Legationibus honorifice gestis illustri &c. &c.

D. D. HVBERTO
ROSENBOOM: J.C.

Toparchæ in 's Grevelregt, Supremæ Hollandiæ Curiæ Præsidi Gravissimo; Ut & in Hollandiæ Australis Synodo antehac Commissario Politico &c. &c.

D. D. HERMANNO
van den HONAART: J. C.

Civitatis Dordracenæ Consulari; In Collegium Potentissimorum Hollandiæ Ordinum Delegato; Aggerum in Alblasserwaard Comiti &c. &c.

EORVM-

EORUMQUE COLLEGIS

VIRIS

NOBILISSIMIS & AMPLISSIMIS
URBIS LUGDUNO BATAVÆ

CONSULIBUS

D. D. CONRADO
RUYSCH, J. Cto.
Consulum Præsidi.

D. D. JACOBO
VROMAN.

D. D. CORNELIO
WITTENS, J. Cto.

D. D. JOHANNI
ELEMAN, J. Cto.

NEC NON

GRAVISSIMO VIRO

D. D. JOHANNI

van den BERG, J. Cto,

Civitatis Lugdunensis Viro Consulari, Ejusque Nomine ad Consilium Status, quod Rebus Militaribus praeest, Delegato, Illustrissimis Curatoribus a Secretis.

Salutem & Felicitatem precatur

HENRICUS COETSIUS.

DEDI-

Ea veræ gratitudinis natura est ac indoles, ut nulla unquam ratione divelli se patiatur a constanti proposito obligationis agnoscendi vinculum, quo iis obstrictam se fateri cogitur, quorum continuo quotidie utitur beneficio. Quare cum Ego a primis annis eo fuerim animo, ut oppositum huic virtuti vitium, atrum scilicet ingratæ mentis characterem, quam maximo semper prosecutus sim odio, si unquam, nunquam certè quam hoc tempore intensiori studio & alacritate publicum Vobis exhibere gratitudinis conatus sum testimonium, quo id effecturum me spero, ut Vos, Illustrissimi & Amplissimi Viri, de meo ergo Vos & a Vobis in me collata beneficia

zelo plenissimè certi sitis ac persuasi. Ad vos itaque hasce in Euclidem lucubrationes & commentarios deferre audeo, quas non tam meas, quam Vobis proprias & certo debitas dicere possum, tum prioris Dedicationis jure ac titulo, qui illas meæ subtraxit potestati; tum præcipue quod Vestro beneficio & erga me favori lucem debere nunquam desinent ac diem. Triennium est & ultra, quod me publico honorare voluistis Titulo, qui mihi ea, quæ privatim meditatus eram, in publica Cathedra profitendi & potestatem concederet & imponeret necessitatem: Quam provinciam cum indefesso constanter labore ac studio & ornare & augere sim annisus, non male factu-

ctum

ćturum me putavi, si a Mathematicorum facile Principe Euclide, Mathematicorum principiorum Collećtore accuratissimo ac Promo Condo fertilissimo, publicarum Lećtionum caperem initium; in quarum decursu ac serie, cum aliquando quædam occurrerent Propositiones, quas alia ac diversa a Veteribus methodo demonstratas vellem, laborem meum ac operam iis quam maxime impendi, quas per indirećtum, ut ajunt, & absurdum probatas nobis tradidit Antiquitas: quibus tamen solis non ita me adstrinxi, ut nullas alias secundis hisce complexus sim curis; cum multis præter istas, etiam direćta & naturali demonstratis via, novas accommodaverim demonstra-

ſtrationes. Quid autem mihi, iſtas ad abſurdum ducentes Demonſtrationes, qua poſſum diligentia, evitanti ac rejicienti magis eſſe debuit curæ, quam ut caverem, ne Ego ipſe in improbatæ jam iſtius Abſurditatis incurrerem vitium? Quod ipſa abſurditate ſane foret abſurdius! Quid etenim accidere poſſet abſurdius, quam ſi hiſce meis Lucubrationibus alia quam Veſtra præſcriberem Nomina, cum nec debuerim minora, nec majora potuerim? non prius, cum unicus Veſtri Favoris, tanquam benigni Syderis influxus illarum maximam mihi inſpiraſſe videatur partem; non poſterius, cum alios nullos agnoſcere datum ſit, quibus & publicorum & privatorum ſtudiorum

redde-

reddere liceat rationem aut libeat: quibus & hoc accedit, quod verendum putaverim, ut, vestro arbitrio hoc meum qualecunque surripiendo Opusculum, turpissimum sacrilegium committere viderer ac nefas, cujus merita pæna felicem ejus progressum ac faustum per Orbem literatum moraretur iter ac sufflaminaret omnino. Propitio itaque vultu, quæso, Illustrissimi & Amplissimi Viri, accipite, & benigno intueri dignemini oculo, exiguum hoc, quod non ex cæco temeritatis impetu, sed ex intensioris Reverentiæ & grati animi zelo, Vobis offero munusculum: Sic Vos Vestra gratia diligentiæ meæ, quæ jam ultro procurrit, addetis calcar; sic Vos Benevolentiæ ac

Favo-

DEDICATIO.

Favoris veſtri radiis meum illuſtrabitis & exhilarabitis animum, ad id, quod demandare mihi voluiſtis munus ſumma cum vigilantia & aſſiduitate porro obeundum. Sub qua ſpe Deum Ter Optimum Maximum ſupplex veneror, ut Vos Reipublicæ & Eccleſiæ bono diu ſuperſtites eſſe, ſeroque in Cælum recipere velit.

PRÆ-

PRÆFATIO AD BENEVOLUM
LECTOREM.

Ante aliquot annos sex priores Euclidis Elementorum Geometricorum Libros in lucem edidi, succinctis & claris Demonstrationibus ita adornatos, ut Geometriæ Tyronum tum privatis exercitiis tum publicis Collegiis satis essent accommodati; cujus usus frequentia hoc effecit, ut distractis omnibus primæ Editionis Exemplaribus, Typographus jam ante annum & ultra, secundam eorum Librorum amicis literis efflagitaverit Editionem, qua sic Exemplarium, qui quotidie immane quantum ascrescebat, iterum supplendo defectum, Geometriæ Cultorum desiderio magis ac magis satisfacere posset. Nec ego hac in parte Typographi justæ petitioni deesse potui nec volui, quia hoc officii mei putabam haud exiguam postulare partem, ut caverem, ne, nimis longo temporis tractu deficiente Collegiorum præsertim circa prima elementa duce ac Cynosura, quid studia Mathematica caperent detrimenti. Libenter itaque me ad secundas hasce curas applicui eo animo ac intentione, ut quicquid in Translatione Belgica, ante Biennium cum Publico communicata, mutatum volui, huc transferrem, & si quid novum ac utile a prioribus Demonstrationibus diversum, invenire daretur, illarum in locum insererem. Sed hæc dum mente revolvo, incido in Logicam seu

artem

artem cogitandi, cujus Author licet studii Mathematici minime sit inimicus, in Mathematicorum tamen Demonstrationibus quosdam censura suæ subjicit defectus, qui, ut Ipse ait, a fine quidem proposito eos non averterunt, sed tamen per devia & incommodas viarum asperitates circumduxerunt: inter istos autem defectus loco tertio reponit Demonstrationem per impossibile de qua sic pronuntiat;

Hoc genus demonstrationum, quo quid demonstratur, non per propria rei principia, sed per aliquod (si res aliter sese haberet,) inde subsequuntuxum absurdum, apud Euclidem frequentissimum est. Cum tamen manifestum sit, tales demonstrationes assensum quidem nostrum extorquere, non autem intellectum clarigare: qui tamen scientiarum finis præcipuus esse debet. Animus enim noster tranquillus quietúsque non fit, nisi sciat & rem esse, & rationem cur ità sit, quod non habetur à Demonstratione deducente ad impossibile.

Non tamen omninò rejiciendæ sunt tales demonstrationes: nam adhiberi possunt ad probandas conclusiones negativas, quæ propriè corollaria tantum sunt aliarum propositionum, vel ex se evidentium, vel alias demonstratarum. Et tunc etiam hoc genus demonstrationis ad impossibile adigens, explicationis potius loco habendum est, quàm novæ demonstrationis.

Tandem dici potest hasce demonstrationes tunc

tantùm

tantùm admittendas, cum alia excogitari non possunt. Culpa tamen non caret, qui illis utitur ad conclusiones positivas probandas. Jam vero multa sunt in Euclide hoc modo demonstrata, quæ tamen facili negotio aliter possent demonstrari.

Quæ verba, præsertim illa, quibus Author suæ circa hunc defectum sententiæ finem imponit, ansam mihi dederunt ac addiderunt animum tentandi, num viam mihi reperire daretur, qua rejectis omnibus ad Impossibile ducentibus Demonstrationibus alias directa ac naturali methodo idem probantes possem substituere: Quam in re cum constanti animo ac interrupto minime labore progredi vellem, tam multa ac varia sese offerebant difficultates ut ab instituto certo certius destitissem, nisi jam continuata indesinenter applicatione una & altera inventis, spes affulgere inciperet, me non omnino oleum perditurum & operam, si eadem, cui insistebam, via progrederer; id quod eo mihi accidebat gratius, quo clarius percipiebam, me omnibus destitutum esse commentatoribus, quorum nullus Euclidis servans ordinem, quod sciam, istas per absurdum procedentes demonstrationes rejicere, aliasque in illarum locum substituere in animum induxerit suum, præter unicum Clavium, qui paucas subinde illasque ob nimiam prolixitatem quodammodo tædiosas proponit: Qui aliorum idem mecum sentientium adeo parvus numerus, tantum abest ut animum fregerit ac propositum, ut multo è

contra incitaverit fortius, ad perficiendum id quod, si ullo liceret modo, ad finem ac destinatum scopum deducere firmiter mihi proposueram; Quem utrum ubique attigerim æque accurate, non meum ferre sed Tuum, Benevole Lector, exspectare judicium debeo: confidens quam maxime, ea Te usurum esse humanitate, ut, si quid occurrat, quod non æque ac reliqua satisfaciat, in bonam interpretari velis partem, haud ignarus, errare humanum esse, & in magnis, licet eventus in quibusdam voto non respondeat, voluntatem tamen esse laudandam. Hunc itaque meum qualemcunque laborem æqui bonique consule, eoque ita utere, ut si aliquos, eo duce in Studio Mathematico, facere possis progressus, missis hisce primis Elementis magna cum alacritate ad altiora transeas, & meam operam, cujus auxilio profeceris, aliis cum favore & benevolentia commendare haud dedigneris. Et hisce Tibi dicerem Vale, nisi restarent pauca quædam

Addenda ad PROPOSITIO 18. & 19. III.

Quarum Demonstrationes sequentes apponere visum fuit, quas nec difficiles nec inconcinnas, ut spero, Lector judicabit.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

DEMONSTRATIO.

Ex Psop. 16. III. patet, si linea Tangens circulum cum Diametro circuli, aut ejus radio faciat angulum, solum illum esse rectum, quia Tangens perpendiculariter insistit Diametro. Vide Fig. pag. 280.

Atqui angulus D C B, *comprehenditur a Tangente* C B *&* *Radio* C D *seu Diametro* C H.

Ergo angulus D C B *seu* H C B *est rectus.*

PROPOSITIO XIX.

DEMONSTRATIO.

Per eandem 16. III. *Sola Diameter cum Tangente facit angulum rectum: cum Tangens ad nullam aliam lineam præter unicam Diametrum sit ducta perpendiculariter:* Vide eandem Figuram.

Atqui linea H C *cum Tangente* C B *facit angulum rectum* H C B.

Ergo linea C H *est Diameter; adeoque transit per centrum* D.

EXPLICATIO NOTARUM.

NE Tyronum in demonstrando ardori vel minimam injiciamus moram, Præfationi notarum ac signorum, quæ demonstrationum brevitati inservire fecimus, significationem subjungimus.

I.

Nota ∞ significat æqualitatem; ut A ∞ B, idem est ac si dicam A. est æqualis B.

2.

Nota < indicat majoritatem; quare si occurrat A < B, intellige A est major quam B.

3.

Signum > minoritatem exprimit: quare A > B significabit A est minor quam B.

4.

Nota + vel plus significat Additionem; adeoque A + B, idem sit ac A cum B, vel A & B simul; vel B ipsi A addendum esse.

5.

Nota ÷ seu minus subtractionem dicit: ut A ÷ B significet A minus B: vel A dempta B: vel B ab A subtrahendum esse.

6. Si

Explicatio Notarum.

6.

Si occurrat alicubi hæc formula.

$$\left.\begin{array}{l} A \;\infty\; B. \\ D \;\infty\; C. \end{array}\right\} A.$$

$$\overline{A + D \;\infty\; B + C.}$$

intelligendum est ab una parte A & D debere addi, ut etiam ab altera parte C addendum esse ipsi B: & tum priorem summam A + D esse æqualem posteriori B + C. per Axioma scilicet primum.

7.

Si vero sese offerat talis designatio

$$\left.\begin{array}{l} A \;\infty\; B. \\ D \;\infty\; C. \end{array}\right\} S.$$

$$\overline{A \div D \;\infty\; B \div C.}$$

illa significabit ab una parte D subtrahi debere ab A, ut & ab altera parte C a B, & tum primum residuum A ÷ D posteriori B ÷ C esse æquale.

8.

Eadem formula etiam non raro occurret applicata signis < & >. hoc modo.

$$\left.\begin{array}{l} A < B. \\ D \;\infty\; C. \end{array}\right\} A.$$

$$\overline{A + D < B + C.}$$

Vel.

$$\left.\begin{array}{l} A > B. \\ D \;\infty\; C. \end{array}\right\} A.$$

$$\overline{A + D > B + C.}$$

& tum intelligendum est post factam additionem summam A ╫ D esse vel majorem in signo < vel minorem in signo > quam summa B ╫ C.

Nec aliter si loco) A occurrat) S vel S (denotabitur residuum A ÷ D esse majus in signo < vel minus in signo > quam residuum B ÷ C. id quod ex numero 7 suum ducit fundamentum.

9.

Si in materia proportionum se offerat.

A — B = C / D.

Vel in numeris

4 — 8 = 3 / 6.

denotat quantitatem A sese habere ad B, sicut C se habet ad D: vel numerum 4 se habere ad numerum 8, sicut 3 ad 6: adeoque ista quatuor esse proportionalia.

10.

Litera X cum duobus punctis utrinque notata hoc modo ·x· significat multiplicationem: ut si occurrat A ·x· B, designat A per B multiplicandum esse, ut ita fiat rectangulum A B. Eodem modo 4 ·x· 8· significat 4 debere multiplicari per 8: quæ tamen multiplicatio non semper absolvitur, ut clarius pateat ex quanam multiplicatione aliquod productum sit generatum.

11. Nota

Explicatio Notarum.

11.

Nota □, cujus omnia latera ſunt æqualia, ſignificat Quadratum: ut □ AB idem eſt ac Quadratum A B.

12.

Nota ▭, cujus latera ſunt inæqualia, denotat Parallelogrammum Rectangulum, vel ſimpliciter Rectangulum; ut ſi occurrat ▭ C D, idem erit ac Rectangulum C D.

13.

Nota √ ſignificat radicem alicujus quantitatis; ut √ A B, denotat ex A B extrahandum eſſe radicem: ſimiliter √ 12 vult, ut ex 12 extrahatur radix, quæ non aliter quam per √ 12 deſignatur.

14.

In demonſtrationibus non paucis quædam literæ occurrunt, infra ſe invicem ſcriptæ, cum linea intermedia; quod ubique in genere ſignificat inferiora ſuperioribus eſſe æqualia; ac proinde inferiora in locum ſuperiorum eſſe ſubſtituenda ac uſurpanda: quemadmodum hoc in ſpecie etiam notavimus ad demonſtrationem Caſus 3. Propoſit. 35. III. Id quod etiam in Propoſ. 36. III. probe notandum.

Simi-

Similiter in Proportionibus hoc obſervandum eſt bene, quando una quantitas collocatur ſupra aliam: tunc inferiorem legendam eſſe pro ſuperiori, cum ſupponantur inter ſe æquales eſſe: Exemplo ſit demonſtratio Propoſitionis 2. VI. quæ eſt pag. 462. quæ ſic habet,

$$\text{Tri. Z} - \frac{\text{Tri.}}{\text{ſeu Y.}} = \text{AE / EC.}$$

dicendum eſt Triangulum Z ſe habet ad Triangulum X hoc eſt Triangulum Y: ſicut baſis AE ſe habet ad baſin EC.

15.

Pro citationibus marginalibus notandum primum numerum minorem ſignificare propoſitionem, ſecundum vero majorem denotare librum: ut 4. III. quartam propoſitionem Libri tertii dicit: & ſic porro in omnibus aliis.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

Cum scientiæ nomen solummodo mereatur illa cognitio, quæ ex certis & indubitatis deducta principiis, omnem vel levissimæ dubitationis discutit nebulam; Mathematicæ procul dubio disciplinæ maximo cum jure hoc sibi vendicant nomen. Cum enim in aliis disciplinis tam sæpe de conclusionibus non aliam ob causam quam principiorum ambiguitatem contentionis serra reciprocetur; Mathematicæ vel ob hoc solum illis palmam præripiunt, quod conclusiones offerant, non ex verisimilibus & assensum emendicantibus, sed ex simplicissimis & inconcussis deductas principiis. Quid enim certi-

titudini & veritatis propagationi magis contrarium, quam in alicujus materiæ pertractatione de varia & nunquam fere sibi simili vocum significatione sæpius repetita disputatio? Quid nos in majorem circa conclusiones dejicit fluctuationem, quam si illas superstruamus assertionibus aut temere assumtis, aut non probatis? quorum unum si contingat a veritate recedentes in turpissimum incidimus errorem; quod si vero alterius semitæ prementes vestigia veritatem assequimur, non firmum nostrum ratiocinium sed casum nos eo deduxisse certo certius existimandum est.

A quo duplici vitio Mathematici sese omnino præstiterunt liberos, tum Definitionum suarum claritate omnem vocabulorum & terminorum, quos in demonstrationum progressu adhibent, ambiguitatem tollendo; tum præmissorum Axiomatum evi-

evidentia & naturali certitudine firmissimum demonstrationibus substruendo fundamentum.

Hinc est quod studia Mathematica, ex primis & simplicissimis emergentia principiis ad tam sublime perfectionis fastigium provecta cernere licet. Hinc est quod illæ scientiæ, quæ in suo initio & quasi nativitatis momento humi repere & pulverem lambere videntur, relicta terra per aerem volitantes, ad ipsum Cœlum ascendant, illiusque aliis inaccessa arcana inconcussis calculi sui subjiciant legibus.

Horum autem Principiorum, quibus tota Mathesis ortum, progressum, omnemque qua eminet evidentiam acceptam referre debet, genera sunt tria: Definitiones, Postulata, Axiomata.

DEFINITIONES.

1. *Punctum est, cujus pars nulla.*

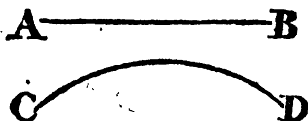


acile concipimus tale punctum in rerum natura minime dari. Quicquid enim est, aut ad Spiritum refertur aut ad corpus : nemo autem facile sibi persuadebit scientias Mathematicas Spiritum aut res spirituales & omni materia carentes pro suo subjecto assumere, cum agat de corpore quatenus mensuram & ad alia corpora proportionem aliquam admittit: unde patet omne punctum quantumvis parvum concipiatur, pertinere ad corpus, esse ipsum corpus & æque ac corpus trinam admittere dimensionem, sc: longitudinem latitudinem & profunditatem: licet enim puncta possint occurrere adeo minuta, ut harum dimensionum accurata distinctio vel intensissimam sensuum fallat aciem, longius tamen patentem vim nostrarum cogitationum non effugiunt, cum semper in illis destinguere liceat partem dextram a sinistra, superiorem ab inferiori.

Si

Si vero ab illis punctis in nostra cogitatione trinam istam dimensionem abstrahamus, eamque licet istis propriam & semper inhærentem, in illis non consideremus, obtinemus puncta Mathematica; quæ ad sensum nostrum relata acutissimæ acus impresso vestigio aliquo modo designari possunt, in quo sensus dubium relinquunt, utrum longitudo latidudinem superet nec ne, an vero latitudo longitudinem excedat: & utrum quælibet ex his profunditate sit major.

2. *Linea vero longitudo latitudinis expers.*



Quemadmodum a parte rei non datur punctum omni prorsus dimensione carens, ita nec datur linea longitudinis tantum capax: quare etiam per abstractionem in linea unam tantum consideramus dimensionem secundum longitudinem, seposita latitudine cum profun-

 ditate.

ditate. Ad cujus considerationis imitationem in communi vitæ usu ulnam rebus mensurandis solummodo applicamus secundum longitudinem, reliquis dimensionibus in latitudinem & profunditatem neglectis.

Cæterum lineæ generationem hoc modo concipere licet. Si consideremus punctum quoddam in aliquo loco constitutum inde moveri incipere; ita ut motus sui visibile relinquat vestigium; illud nobis exhibebit lineam hoc modo generatam.

Quia autem illud punctum ab uno loco ad alium moveri potest vel per viam rectam vel per curvam, uti videre est in lineis AB. CD, inde oritur lineæ divisio in Rectam vel Curvam.

3. *Lineæ autem termini sunt puncta.*

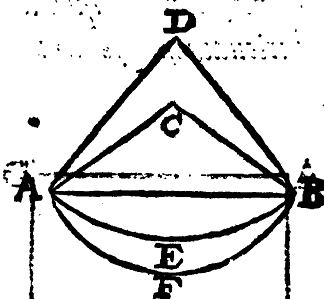
Hoc facile intelligitur in lineæ jam allata generatione, quod nimirum idem illud punctum quod in principio sui motus erat in loco A vel C, in fine perveniat ac subsistat in loco B vel D.

4. Linea recta est, quæ ex æquo sua interjacet puncta extrema.

Vel cujus puncta extrema obumbrant omnia media,

Vel minima earum, quæ a puncto ad punctum duci possunt. Juxta Archimedem.

Ad quam ultimam Definitionem notandum.

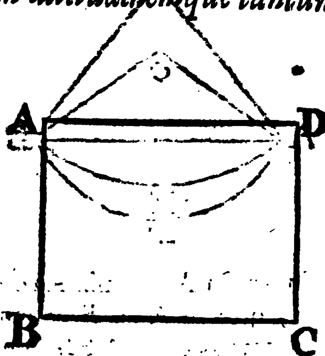


1. Cum recta AB sit minima omnium linearum, quæ ab A ad B possunt duci, reliquas lineas AEB, AFB, quæ sunt incurvatæ, ut & ACB, ADB. quæ sunt quasi fractæ in punctis C & D, necessario esse majores linea brevissima AB: adeoque hic statim sese prodere Propositionem 20. Libri I.

2. Lineas exteriores A D B. A F B. quæ a minima A B remotiores sunt quam interiores A C B. A E B. hisce etiam majores esse, quia per longiorem viam procedunt antequam ab A usque ad B pertingant, quam duæ interiores A C B. A E B. Unde similiter emergit Pars prima Propositionis 21. Libri I.

Ex quibus per definitiones contrarias facile innotescit quænam sit Linea curva.

5. Superficies est quæ longitudinem latitudinemque tantum habet.



Sicut non datur punctum cum nulla, nec linea cum una tantum dimensione, sic etiam à parte rei non datur superficies cum duabus, sc: longitudine & latitudi-

ne

ne tantum, seclusa profunditate, quæ idcirco nostro tantum cogitandi modo a reliquis separatur ac in corpore non consideratur.

Superficiei autem generationem hac ratione concipere possumus.

Cogitemus punctum A versus partes inferiores motum descripsisse lineam rectam A B; deinde eandem lineam A B moveri incipere versus partes dextras, donec linea A B perveniat ad locum D C. Patet isto motu punctum A descripsisse lineam A D, & punctum B lineam B C; quemadmodum etiam omnia puncta intermedia lineæ A B suas lineas descripsisse concipiendum est: ut ex tali motu lineæ A B generata sit Superficies A B C D.

6. Superficiei autem extrema sunt lineæ.

Quod facile innotescit ex illis quæ circa superficiei generationem modo dicta sunt.

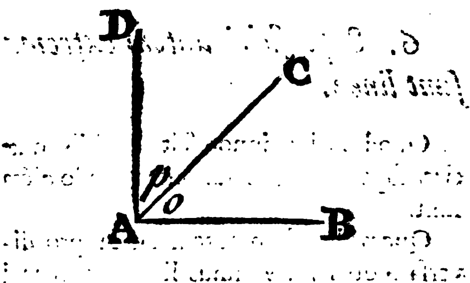
Quemadmodum autem antea pro diversa motus via vidimus lineam generari aut Rectam aut curvam; eodem etiam modo per diversum lineæ motum superficies describitur aut Recta seu Plana aut Curva.

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet rectas.

Quæ antea de linea recta dicta sunt, similiter hic applicari possunt.

Hinc nullo negotio intelligitur quænam sit superficies curva.

8. Planus autem angulus est duarum linearum in plano se mutuo tangentium & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.



Ad constituendum angulum planum seu angulum in superficie, requiritur.

1. Ut duæ lineæ se mutuo tangant.

2. Ut non jaceant in directum, sed una ad alteram inclinet.

Quemadmodum utramque hanc conditionem cernere licet in angulo C A B, ubi duæ lineæ A C. A B, se invicem tangentes in puncto A, non jacent in directum, sed ad se mutuo inclinant.

Non autem pauciores nec plures duabus ad angulum planum exiguntur lineæ.

Non pauciores, quia si unica ista linea dividatur in duas, duæ illæ sibi jacebunt in directum; id quod repugnat secundæ conditioni.

Non plures, quia ex: gr: tertia A D, si cum reliquis in eodem sit plano, non unum sed duos faciet angulos D A C. C A B: si vero sit extra planum reliquarum linearum, non angulum faciet planum, sed solidum, cujus Definitionem Euclides libro XI. tradit.

Quia jam natura anguli plani consistit in duarum linearum ad se invicem inclinatione, patet anguli alicujus quantitatem non consistere in majori vel minori longitudine linearum: sed tantum in illarum majori vel minori inclinatione; duæ enim lineæ majores eandem possunt habere inclinationem cum duabus minoribus, minime mutata anguli quantitate.

Deinde

Deinde notandum Geometras ad designandum aliquem angulum tres adhibere literas, quarum media punctum denotat ad quod lineæ angulum continentes concurrunt. Ut ad denominandum angulum qui ad punctum A, constituitur a duabus lineis AC. AB. scribitur angulus CAB; vel ab altera parte angulus DAC est qui in puncto A fit a lineis AD. AC.

Nos autem brevitatis & perspicuitatis gratia in sequentibus non semel loco trium literarum angulo designando adhibemus unam ipsi inscriptam.

Ut ad nominandum angulum DAC. efferemus angulum P. sic etiam loco anguli CAB scribemus angulum O.

9. Cum autem continentes angulum lineæ fuerint rectæ, rectilineus appellatur angulus.

Accedit Euclides ad anguli divisionem. Supra vidimus linearum duo esse genera, scilicet illas esse vel rectas, vel curvas.

Quia autem illæ tribus diversis modis possunt conjungi, sc: vel recta cum re-

Ut punctum lineæ, linea superficiei, superficies corporis.

14. *Figura plana est superficies plana, una vel pluribus lineis undique terminata.*

Cum lineæ sint vel rectæ vel curvæ, illæque tribus modis possint conjungi; figurarum planarum inde oriuntur tres species.

Curvilineæ, quæ vel una vel pluribus curvis terminantur. Una terminatur circulus, cujus definitionem statim tradit Euclides.

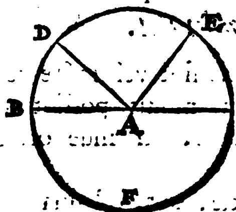
Mixtilineæ, quæ partim curvis partim rectis terminantur: huc pertinent semicirculus & segmentum Circuli.

Rectilineæ quæ solis rectis terminantur, quæ comprehendunt omnia polygona sive regularia sive irregularia.

15. *Circulus est figura plana sub una linea curva D C F comprehensa, quæ vocatur Peripheria, ad quam ab uno puncto A eorum quæ intra figuram sunt posi-*

ta,

ta, omnes cadentes rectæ AB. AD. AE. AC inter se æquales sunt.



Proponit Euclides definitionem Circuli jam descripti, cujus delineationem & generationem hoc modo concipére possumus. Ducta sit qualibet recta linea AB. cujus una extremitas A ponatur immota & affixa plano; altera verò extremitas B cum tota linea moveatur circa punctum A, per loca AD. AE. AC. AF, donec tandem redeat ad locum AB, unde moveri cœperat: ista linea AB hâc circumductione describet circulum BCEGF.

Ex qua descriptionis forma patet omnes Radios cujuslibet Circuli esse inter se æquales: cum linea AB, cujus circumvolutio circulo ortum dedit, per

 omnia

omnia loca, AD. AE. AC & similia transiit, adeoque punctum B fuit aliquando in punctis D. E. C. &c. adeoque lineæ AD. AE AC. sunt æquales eidem lineæ AB.

Hinc jam etiam immediate sequitur omnia puncta circumferentiæ D C F B æqualiter distare a puncto A.

16. *Illud autem punctum A Centrum circuli dicitur.*

17. *Diametur Circuli est recta quædam BC per Centrum A ducta, & utrinque in punctis B. C. peripheriâ terminata; quæ & Circulum bifariam secat.*

Ut linea in Circulo ducta sit Diameter duæ requiruntur conditiones.

I. Ut transeat per centrum.

II. Ut ab utraque parte terminetur in peripheria.

Adeoque omnis linea, harum nullam aut tantum unam habens conditionem, Diametur dici nullo modo potest.

Cæterum Diametrum circulum divide-

re bifariam patet ex eo quod transfeat per Circuli punctum, quod ex omnibus medium eſt: quia ſcilicet eſt medium omnium Diametrorum quæ in Circulo duci poſſunt.

Sequitur jam ſecunda ſpecies figurarum, nempe mixtilineæ.

18. *Semicirculus autem BDECAB eſt figura, quæ continetur ſub Diametro BC, & dimidia circumferentia BDEC.*

19. *Segmentum circuli eſt figura quæ continetur ſub qualibet recta circulo inſcripta & abſciſſa peripheria.*

Segmentum, excluſo ſemicirculo, eſt duplex, vel majus Semicirculo, vel minus.

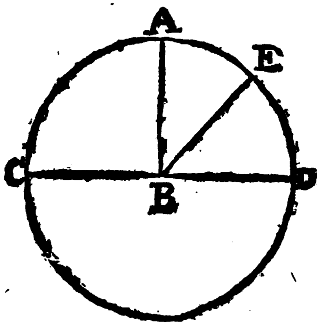
Segmentum majus eſt illud, in quo reperitur centrum.

Segmentum minus eſt illud, quod centrum non continet.

Nota.

Nota.

Cum ex Definitione 8 pateat anguli rectilinei naturam requirere, ut duæ rectæ se mutuo tangentes non in directum jaceant, hoc est, non unam constituant lineam rectam, sed ut ad se mutuo inclinentur, notandum est istam inclinationem non clarius explicari aut concipi posse, quam per arcus Circuli ex ipso puncto anguli, ut Centro & quolibet radio descripti.



Centro B, libitæ magnitudinis radio BC, descriptus sit Circulus CAD; ductaque sit Diameter CBD, quæ faciat Semicirculum CAED, in quo ex

 Centro

Centro ducta sit B A Perpendicularis & B E obliqua ad Diametrum: Quo posito facile concipi potest angulum C B A generatum esse ex Circumgyratione lineæ B C, circa punctum B, a loco B C, usque ad B A; in qua circumductione punctum C descripserit arcum C A, qui idcirco etiam ex sua natura poterit sumi pro mensura istius anguli C B A.

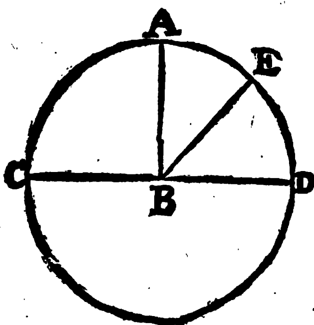
Eodem modo etiam A E erit mensura anguli A B E: ut & arcus E D mensura anguli E B D, quia eadem circumlatione circa centrum B concipimus lineam B A deferri in B E; & deinde lineam B E deduci in B D, quæ est in Diametro.

Quia jam posita est A B perpendicularis Diametro C D, adeoque juxta Def. 10. angulus A B C æqualis est angulo A B D, seu uterque rectus, necessario sequitur lineam A B. ab utraque parte versus Diametrum C D æqualiter esse inclinatam, seu punctum A non magis inclinare aut vergere versus C quam versus D; adeoque, quia inclinationes istæ mensurantur arcubus A C, A D, patet etiam istos arcus A C, A D inter se esse æquales.

Cum autem recta C B D sit Diameter Cir-

Circuli, liquet ſemicirculum C A D; continere menſuram duorum rectorum; adeoque totam Circuli circumferentiam comprehendere menſuram quatuor angulorum.

Cæterum omnes Circuli, ſive majores ſint ſive minores, a Mathematicis dividuntur in partes æquales 360. quas gradus vocant; quare Semicirculus continebit 180 tales gradus, & Quadrans ſeu quarta pars Circuli gradus 90, qui numerus facit menſuram anguli recti.



Quando itaque arcus aliquis ut ED minor eſt quadrante, certo concludere licet angulum EBD etiam eſſe minorem angulo recto A B D. E contra vero ſi vero arcus C A E ſit major quadrante C A, angulum

gulum C A E majorem esse recto C B A.

Notandum deinde cum duo anguli recti A B C, & A B D suis mensuris C A, A D exhauriant dimidiam Circumferentiam C A E D: & similiter arcus C E, C D, quæ sunt mensuræ duorum angulorum C B E. E B D, simul constituant eandem semicircumferentiam C A E D: ut & tres arcus C A, A E, E D, quæ sunt mensuræ trium angulorum C B A, A B E, E B D, faciant simul eandem semicircumferentiam; (& eodem modo de pluribus angulis ratiocinari licet) sequitur, duos angulos A B C. A B D simul sumptos æquales esse duobus angulis C B E. E B D etiam simul sumptis; & præterea etiam æquales tribus angulis C B A. A B E. E B D iterum simul sumtis hoc est æquales duobus Rectis.

Quæ consideratio nobis suppeditat sensum & demonstrationem Propositionis 13. Libri I.

Præterea quoniam duæ mensuræ A C & A D simul sumtæ faciunt mensuram duorum angulorum rectorum, adeoque absolvunt semicirculum C A D, quæ a Circulo non abscinditur nisi a Diametro,

tro, quæ est linea Recta, sequitur quod nulla linea cum A B, aut E B possit constituere duos angulos rectos præter lineam rectam C D.

Id quod facit Propositionem 14. Libri I. ut postea fiet manifestum.

Nunc Euclides aggreditur tertiam speciem figurarum sc: rectilineas.

20. *Rectilineæ figuræ sunt quæ sub rectis lineis continentur.*

Distinguuntur autem rursus hæ figuræ rectilineæ in tres species; vel enim sunt Trilateræ; vel Quadrilateræ; vel Multilateræ.

21. *Trilateræ quidem figuræ sunt, quæ sub tribus.*

22. *Quadrilateræ vero quæ sub quatuor.*

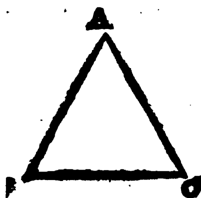
23. *Multilateræ denique quæ sub pluribus quam quatuor rectis comprehenduntur.*

Generali vocabulo hæ dicunter Multilateræ ad infinitam nominum adeoque & definitionum evitandam multitudinem.

Jam cum figurarum rectilinearum primam speciem constituant figuræ Trilateræ, seu vulgo sic dicta Triangula, illorum divisionem proponit Euclides, petitam ex consideratione tum laterum, tum angulorum, quorum numerus (ut & in omnibus figuris rectilineis) est æqualis: quippe triangulum tot continet angulos quot latera.

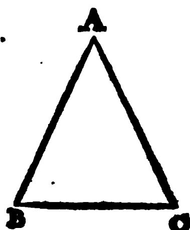
Triangulum respectu laterum est triplex; Æquilaterum, Isosceles, & Scalenum.

24. *Triangulum æqualiterum est, quod tria latera habet æquilia.*

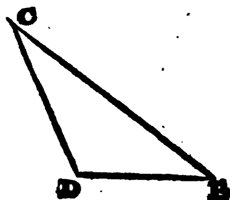


25. *Iso-*

25. *Isosceles autem, quod duo tantum habet æqualia AB. AC.*

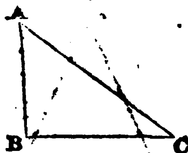


26. *Scalenum denique quod tria inæqualia habet latera.*

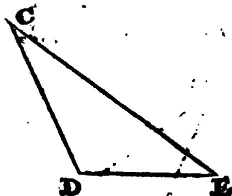


Secunda Triangulorum divisio pro fundamento habet tres angulorum species; sc: rectum, obtusum & acutum; hinc enim Triangulum dividitur in Rectangulum, Obtusangulum, & Acutangulum.

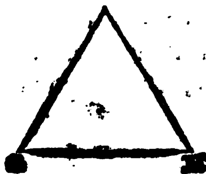
27. *Triangulum rectangulum est, quod unum habet angulum rectum ABC.*



28. *Obtusangulum est, quod unum habet angulum* CDE *obtusum id est majorem recto.*



29. *Acutangulum denique quod tres angulos* F. G. H. *habet acutos, hoc est, minores recto.*



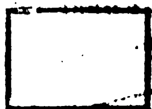
Se-

Sequitur jam ſecunda ſpecies figurarum rectilinearum: ſcilicet Figuræ Quadrilateræ. Hæ autem ab Euclide recenſentur quinque: Quadratum: Figura altera parte longior; Rhombus; Rhomboides; & Trapezia.

30. *Quadratum eſt, quod æquilaterum eſt & rectangulum.*

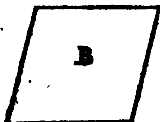


31. *Altera parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.*

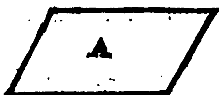


32. *Rhombus autem, quæ æquila-*

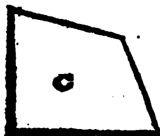
quilatera quidem, sed rectangula non est.



33. *Rhomboides est, quæ adversa & latera & angulos æqualia inter se habens, neque æquilatera est, neque rectangula.*



34. *Trapezia denique dicuntur reliquæ figuræ quadrilateræ; quæ ad nullam ex quatuor præcedentibus referri possint.*



35. *Recta*

35. *Rectæ lineæ parallelæ seu æquidistantes AB. CD sunt, quæ in eodem plano existentes, & utrimque in infinitum productæ, ad eandem distantiam a se invicem manent remotæ; ideoque nunquam concurrent.*

A———————B

C———————D

Non omnes lineæ, quæ unquam concurrunt, parallelæ dicendæ sunt; cum dentur lineæ, quæ licet simul in infinitum producantur, ita ut ad se mutuo in infinitum magis ac magis accedant, nunquam tamen concurrent; ut Hyperbola & recta linea; Conchois & recta linea; Duæ æquales Parabolæ circa eandem Diametrum: quæ idcirco nequaquam dicendæ sunt parallelæ.

Unde facile manifestum evadit ad naturam parallelismi necessario requiri æqualem ab omni parte distantiam: quam conditio-

ditionem ab Euclide omissam nos cum celeberrimo Tacqueto adjecimus.

Hæc autem distantia mensuratur penes duas perpendiculares, quæ ductæ sunt inter duas istas parallelas; sive ponatur istas lineas eductas esse ex duobus punctis unius ex istis lineis ad alteram; sive primam ab aliquo puncto unius ad alteram; & secundam iterum ab aliquo puncto istius alterius ad priorem: modo istæ perpendiculares sint inter se æquales.

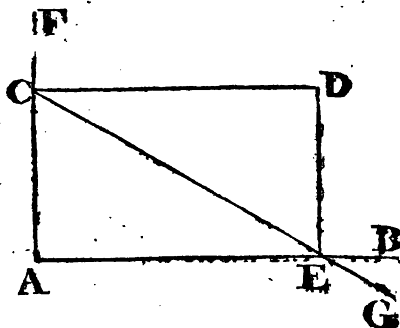
Ut in figura sequente perinde erit, sive perpendiculares istæ A C, E D ambæ sint ductæ ex A & E versus superiorem lineam C D; sive illarum una ex C in A, & altera ex E in D; quia posito illas esse æquales puncta C. D a punctis A. E æqualiter distabunt: adeoque linea C D erit parallela A E:

Ex quibus patet æqualitatem perpendicularium constituere parallelismum; & contra parallelismum ista perpendicularium niti æqualitate.

Quæ claram & positivam Propositionum 27 & 29 Libri I. dabunt Demonstrationem.

Cæterum linearum parallelarum, quas Euclides ut jam descriptas considerat, generatio-

nerationem & dilineationem duobus modis concipere possumus.



PRIMUS MODUS.

Ponamus lineam CA perpendiculariter insistere lineæ AB, ut angulus CAB sit rectus; deinde cogitemus lineam CA una suâ extremitate moveri super lineam AB, ut semper ipsi maneat perpendicularis; si jam linea CA hoc suo motu pervenerit in DE, punctum C descriptam relinquet lineam CD, quæ nunquam potest magis recedere à linea AB, nec ad ipsam propius accedere, cum linea AC durante suo motu semper fuerit eadem & sibi æqualis: adeoque linea CD in omnibus suis punctis manet cum AB in eadem distantia, & si iste motus lineæ CA

in

in infinitum duraret, etiam linea CD in infinitum ab AB æquidistaret, adeoque nunquam cum illa concurreret: unde jam certo concludere licet lineam C D hoc modo generatam lineæ A B esse parallelam.

Deinde cum jam constet lineam C D non posse magis in uno puncto ad lineam A B accedere aut ab illa recedere quam in alio, sequitur lineam C D ad lineas C F, CA habere æqualem inclinationem, adeoque per definitionem Perpendicularis angulum D C A esse rectum, & æqualem angulo C A B qui positus est rectus: adeoque duos angulos interiores CAB. D B A simul sumtos esse æquales duobus rectis. Id quod natura parallelarum AB. CD hac ratione descriptarum omnino requirit.

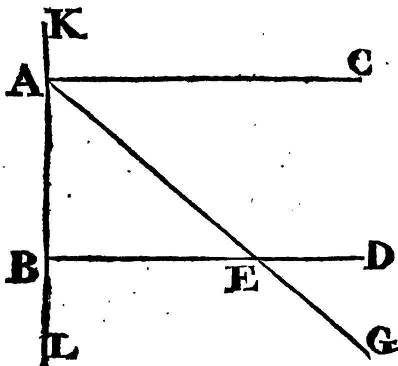
Quæ consideratio & descriptionis ac generationis forma cum omnibus applicari possit parallelis, sequitur lineam quæ uni parallelarum perpendicularis est, etiam alteri fore perpendicularem.

Unde jam hanc parallelarum stabilire licet proprietatem; quam Tacquetus inter Axiomata recenset: scilicet, Quod Parellelæ lineæ communi utantur perpendiculo.

SECUN-

SECUNDUS MODUS.

Ad lineæ KL punctum A concipiatur facta linea AC perpendicularis, quæ licet in infinitum producatur, nunquam inclinationem quam ad AK, AL habet (illa autem utrimque æqualis est) mutabit, cum anguli quantitas non in majori vel minori linearum longitudine, sed in majori vel minori inclinatione consistat.



Deinde ex alio quovis puncto B cogitemus duci lineam perpendicularem BD, quæ etiam licet infinite protrahatur, nunquam aliam acquiret inclinatio-

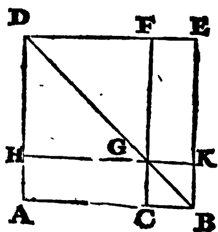
nem ab illa quam jam habet ad lineas B K. B L.

Cum jam linea A C in infinitum producta non possit ascendere versus superiora nec descendere versus inferiora: similiter linea B D etiam in infinitum continuata nec altiora nec demissiora petere possit, necessario sequitur istas lineas A C. B D semper servaturas eandem a se invicem distantiam nec concurrere posse unquam; adeoque juxta hanc definitionem illas esse parallelas.

36. *Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela seu aequidistantia.*

37. *Cum vero in parallelogrammo Diameter B D ducta fuerit, duaeque rectae C F. H K lateribus parallelae secantes Diametrum in uno eodemque puncto G, ita ut parallelogrammum distributum*

butum sit in quatuor parallelogramma; illa per quæ Diameter non transit, scil: A G. G E. *appellantur complementa eorum quæ circa Diametrum consistunt, ut* H F. C K.



POSTULATA.

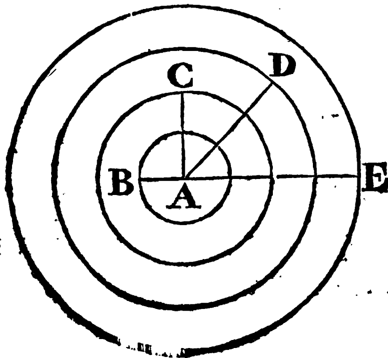
1. *Postuletur a quovis puncto* A *ad quodvis punctum* B *rectam lineam* A B *ducere.*



2. *Et terminatam rectam AB in continuum recta producere in C.*



3. *Et quovis centro A & quolibet radio AB. AC. AD. AE. circulum describere.*



AXIOMATA.

1. *Quæ sunt eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.*

2. *Si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia.*

3. *Si æqualibus æqualia demantur, residua manebunt æqualia.*

4. *Si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia.*

5. *Si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.*

6. *Et quæ ejusdem sunt duplicia, inter se sunt æqualia.*

Idem intelligendum de triplicibus, quadruplicibus, quintuplicibus & sic in infinitum.

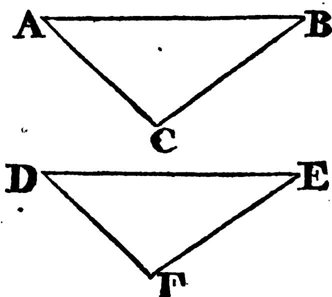
7. Et quæ ejuſdem ſunt dimidia, inter ſe ſunt æqualia.

Nec hoc axioma ſe tantum reſtringit ad partes dimidias; ſed etiam in tertiis, quartis, in quintis & ſic porro in infinitum ſuam habet veritatem.

8. Quæ congruunt ſibi mutuo, inter ſe ſunt æqualia.

Si primo concipiamus lineam DE ſuperimponi lineæ AB, ita ut puncta extrema D. A. ut & E. B. coincidant; ſimiliter omnia puncta intermedia lineæ DE correſpondeant omnibus mediis punctis lineæ AB, pro certo hinc aſſerere poſſumus lineam DE eſſe æqualem lineæ AB: quia omnes partes lineæ DE examuſſim conveniunt cum omnibus partibus lineæ AB.

Deinde



Deinde ſub qualibet inclinatione ad lineæ A B punctum A ducatur linea A C: ſi jam ad lineæ D E punctum D ducatur linea D F, ita ut inclinatio lineæ D F ad lineam D E, ſit æqualis vel ſimilis inclinationi lineæ A C ad lineam A B: & linea D F ſit æqualis lineæ A C: & tum angulus F D E ſuperimponatur angulo C A B, omnia correſpondebunt: ſcilicet linea D E cum A B; inclinatio cum inclinatione, & linea D F cum A C. Adeoque jam non tantum lineæ congruunt ſed & anguli.

Si denique ducatur recta C B, ut & F E, & una figura D E F imponatur alteri A B C: jam etiam tertium latus F E congruet cum tertio latere C B; adeo-

que totum triangulum DEF congruet triangulo ABC: unde necessario sequitur unum alteri esse æquale.

9. *Totum sua parte majus est.*

10. *Omnes anguli recti inter se sunt æquales.*

11. *Si in duas rectas AG. BD recta AB incidens interiores & ad easdem partes angulos ABD, BAG duobus rectis minores faciat; productæ duæ illæ rectæ tandem coincident inter se ad eas partes, ubi sunt isti anguli duobus rectis minores.*

Cum in hoc Axiomate mentionem faciat Euclides duarum linearum coincidentiæ, & duorum interiorum angulorum, facili negotio patet illud aliquo modo respectum habere ad Definitionem linearum parallelarum superius traditam: cumque in ista definitione nec tertia linea

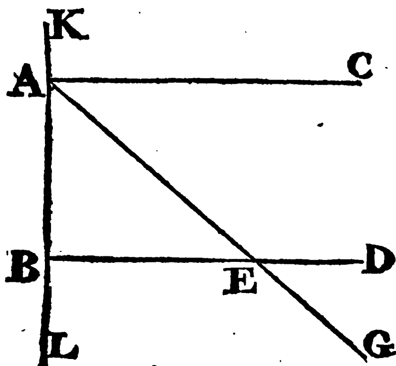
nea incidens, nec duo anguli interiores occurrant, fatendum ingenue erit, hujus Axiomatis lucem in primo intuitu non apperere tantam, quanta in præcedentibus statim affulsit; imo quanta etiam in omnibus communibus sententiis requiritur.

Quod si vero in memoriam revocemus supra allatos modos generationis parallelarum, putamus inde huic Axiomati multum affundi posse claritatis. Sumamus Ex: Gr: secundum.

Ibi quippe vidimus lineas parallelas AC. BD ex sua natura & generationis modo requirere ut duo anguli CAB. DBA sint recti, hoc est istius parallelismi non aliud esse fundamentum quam cum angulus unus ABD sit rectus; (quod semper supponimus) ut alter BAC etiam sit rectus: adeoque ut linea AB perpendiculariter in lineam AC eadens etiam sit perpendicularis ad alteram BD.

Si jam ex puncto A infra lineam AC ducatur alia quælibet ut AE; ita ut angulus BAE, sit minor recto: illa necessario si producatur magis ac magis debet recedere ab AC: quia alias deberet aut esse parallela ipsi AC, aut iterum in alio puncto cum ipsa concurrere: non prius, quia habet punctum A commune adeo-

que in illo coincidunt; non posterius quia tum duæ rectæ spatium comprehenderent, quod repugnat Axiomi sequenti.



Cum manifestum nunc sit lineam A E magis ac magis recedere ab A C, etiam patet illud non posse fieri nisi illa magis ac magis appropinquet ad alteram parallelam B D; quod tamen in infinitum absque concursu fieri minime possibile est; si enim unius lineæ punctum A ab alterius lineæ puncto E ad quamlibet distantiam remotum esse concipiamus; & a puncto A versus E ducere incipiamus lineam aliquam brevem; illa si producatur, adeoque ab A C magis ac magis recedat, necessario ad punctum E magis ac magis accedet,

accedet, donec tandem porro producta per illud punctum E transeat.

Si enim impossibile sit ut per E transeat, e duobus unum verum est; aut a puncto A. ad E. non posse duci lineam rectam, quod repugnat postulato primo: aut lineam AE, si quam proxime ad punctum E pervenerit, aliorsum se determinare adeoque se flectere; quod non potest esse nisi ex recta fiat curvu: quod tum est contra Hypothesin.

Duæ tamen adhuc discutiendæ restant difficultates, quæ linearum A E. B D necessarium vacillare faciant concursum.

Prima est, quod Hyperbola & recta, Conchois & recta; duæ Parabolæ æquales circa eandem diametrum, simul in infinitum productæ nunquam concurrant.

Quæ tamen difficultas evanescit si consideremus illas lineas esse extra genus linearum, de quibus agit Euclides in hoc Axiomate; expresse enim tantum loquitur de lineis rectis; cum Assymptori sint (saltem altera) ex lineis mixtis.

Altera difficultas oritur ex Clarissimi Bettini duabus rectis (in Apiar. 3. & Ærario Tom. I. pag. 354.) quæ licet internos angulos duobus rectis minores efficiant, si producantur tamen nunquam coincidant.

Sed

Sed nec hoc nostri Axiomatis evidentiam & veritatem labefactare potest. Cum istæ lineæ non simpliciter seu tanquam a puncto ad punctum, sed cum certa quadam conditione, scilicet adjuncta proportione producantur. Quæ proportionalis productio hic nullum omnino habet locum.

12. *Duæ rectæ spatium non comprehendunt.*

13. *Omne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis.*

Quoniam majoris perspicuitatis gratia Mathematicis in more positum est, ut veritates quas demonstrandas suscipiunt, distinctis a se invicem complectantur propositionibus; notandum est hasce propositiones dividi in Problemata & Theoremata.

Problema est propositio, in qua aliquid proponitur efficiendum, & conclusionis formula semper talis est: Quod erat faciendum.

Theorema est propositio, in qua proprietas

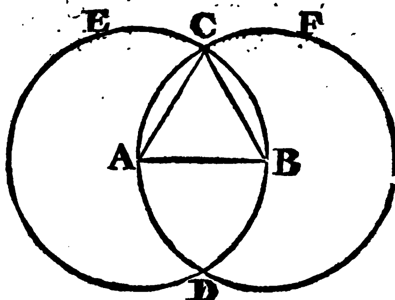
prietas quædam aut veritas de aliqua re jam facta & in figura jam constructa, proponitur demonstranda: & conclusionis formula semper est. Quod erat demonstrandum.

Corollarium est consectarium quod ex facta jam demonstratione tanquam lucrum aliquod colligitur.

Lemma est demonstratio præmissæ alicujus, ut quæsiti demonstratio clarior evadat & brevior.

PROPOSITIO I.

Super data recta terminata A B triangulum æqualaterum constituere. Probl. I.



CON-

CONSTRUCTIO.

a Post. 3. I. Centro A radio AB, [a] describe circulum BCE.

II. Centro B, eodem radio BA, a describe circulum ACF.

b Post. 1. III. Ex puncto intersectionis C [b] duc rectas CA. CB.

Dico triangulum ABC esse æquilaterum.

DEMONSTRATIO.

c Def. 15.

AB ∞ AC.
BA ∞ BC. } c

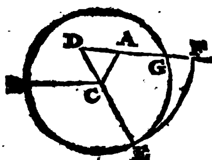
d Ax. 1. Ergo AC ∞ BC. d

e Def. 24. Adeoque triangulum ABC est [e] æquilaterum. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO II.

Ad datum punctum A datæ rectæ BC æqualem rectam AF ponere. Prob. 2.



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur a C ad A recta [a] CA, [a] Post. 1.

2. Super CA [b] fiat triangulum æquilaterum. CDA. [b] 1. 1.

3. Centro C, radio CB describe [c] circulum. [c] Post. 3.

4. Latus DC produc usque ad Circumferentiam in E. [d] Post. 2.

5. Centro D radio DE [e] describe arcum circuli EF. [e] Post. 3.

6. Denique latus DA [f] produc usque ad istum arcum in F. [f] Post. 2.

Dico lineam AF esse æqualem datæ BC.

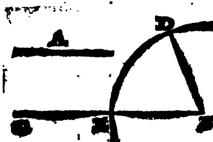
DE-

DEMONSTRATIO.

g Def. 15.	S {	DF	∞	DE. g.	
h Def. 24.		DA	∞	DC. h.	
i Ax. 2.		AF	∞	CE. i.	
k Def. 15.	Atqui	BC	∞	CE. k.	
l Ax. 1.	Ergo	AF	∞	BC. l.	Q.E.F.

Probl. 3. **PROPOSITIO III.**

Datis duabus rectis inæqualibus A & BC; de majori BC minori A æqualem rectam BE detrahere.



CON-

CONSTRUCTIO.

1. Ad lineæ C B extremitatem B, sub quolibet angulo [a] pono rectam B D æqualem minori A. a 2. 1.

2. Centro B, radio B D [b] describo arcum circuli, secantem rectam C B in E. b Post. 3.

Dico lineam B E esse æqualem ipsi A.

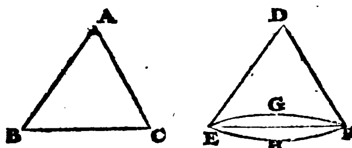
DEMONSTRATIO.

	BE	∞	BD c.	c Quia sunt radii ejusdem circuli. c Def. 15.
Atqui	A	∞	BD d.	d Per constructionem.

Ergo BE ∞ A. d. Q. E. F. d Ax. I.

PROPOSITIO IV.

Theor. I. *Si in triangulis ABC. DEF, unum latus AB, uni DE: & alterum AC alteri DF sit æquale; ut & anguli A. D. istis lateribus contenti sint æquales: Erit quoque basis BC æqualis EF, angulus B angulo E: ut & C ipsi F; Et triangulum ABC æquale triangulo DEF.*



DEMONSTRATIO.

Concipiamus Triangulum DEF superimponi triangulo ABC, ita ut punctum E cadat in B, & latus ED super BA; quando punctum D præcise cadet

det in A, quia latera A B & D E dantur æqualia. [a]

Deinde latus D F cadet super A C, quia anguli B A C. E D F ponuntur æquales. [a]

Denique punctum F necessario cadet in C, quia latera A C. D F sunt æqualia. [a]

[a] Ax. 8.

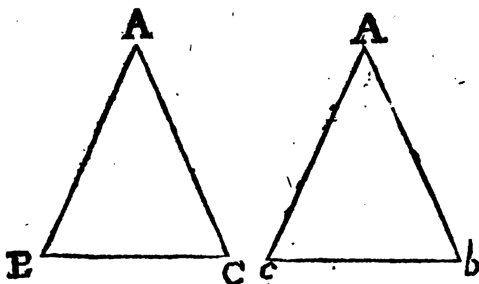
Ergo punctum E idem erit cum B; & F cum C. Ergo linea E F congruet cum A C, adeoque ipsi erit æqualis: & omnes anguli congruent, ut & tota triangula: quare illa sunt aqualia. [a]

Q. E. D.

PROPOSITIO V.

Theor. 2.

Isoscelis Trianguli A B C qui ad basin sunt anguli B. C. inter se sunt æquales.



DEMONSTRATIO.

Concipiamus Triangulum A B C. adhuc semel, sed situ contrario, esse positum, ut A c b. Tum in Triangulis A B C. A c b. erit.

Latus	A B	∞	A c.
	A C	∞	A b.
Angulus	A	∞	A.

Ergo

Ergo duo ista Triangula se habent juxta præcedentem 4. I. Adeoque est

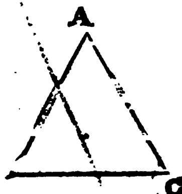
Angulus B ∞ c.

Atqui etiam Ang; C ∞ c.

Ergo est B ∞ C. [a] Q. E. D. [a] Ax. I.

COROLLARIUM.

Omne Triangulum æquilaterum, est etiam æquiangulum.



DEMONSTRATIO.

Sumto latere B C pro basi erit

Angulus B ∞ C. [a]

Sumto vero latere C A pro basi, erit etiam [a] 5. I.

Angulus A ∞ C. [a]

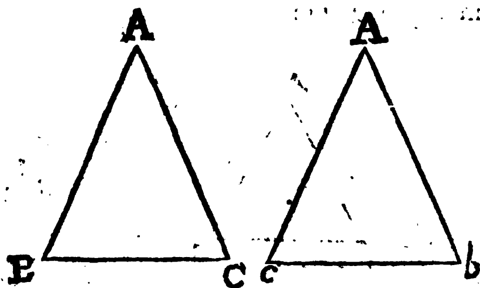
Ergo erit A ∞ B. [b] [b] Ax. I.

Adeoque tres A. B. C, erunt æquales.

Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

Theor. 3. *Si Trianguli A B C duo anguli B. C. inter se æquales fuerint, latera A C. A B æqualibus angulis opposita, etiam inter se erunt æqualia.*



Inversa præcedentis V.

DEMONSTATIO.

Concipiamus iterum, ut ante, Triangulum A B C adhuc semel contrario situ esse positum.

Tunc in Triangulis A B C. A c b. erit

Angulus B ∞ c.

Angulus C ∞ b.

Basis BC ∞ c b.

Si

Si jam Basis c b imponatur Basi B C illæ ab omni parte congruent: Et propter æqualitatem angulorum B. c. ut & C. b. latus c A cadet super B A: & latus b A super C A; adeoque punctum A cadet in A:

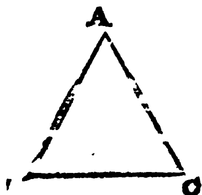
Si enim duo ista puncta A & A non coinciderent, tum latera c A. b A non caderent super B A. C A: adeoque anguli B & c: ut & C. b. non forent æquales: contra Hypothesin.

Quare, cum jam omnia congruant, erit
Latus AB ∞ Ac.
At vero latus Ac est idem cum AC.

Ergo AB ∞ AC.

COROLLARIUM.

Omne Triangulum æquiangulum est æquilaterum.



DEMONSTRATIO.

Posito angulo B ∞ C, erit
Latus AB ∞ AC. a

a 6. I. Posito angulo C ∞ A, erit
Latus AB ∞ BC. a

---

b Ax. I. Ergo erit latus AC ∞ BC. b
Adeoque tria latera AB. AC. BC erunt æqualia. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

Theor. 4. *Hæc tantum inservit demonstrationi propositionis sequentis, quam absque illa hoc modo demonstramus.*

PRO-

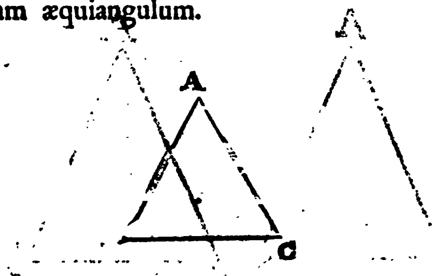
Ergo duo ista Triangula se habent juxta præcedentem 4. I. Adeoque est

Angulus B ∞ c.
Atqui etiam Ang; C ∞ c.

Ergo est B ∞ C. a Q. E. D. a Ax. I.

COROLLARIUM.

Omne Triangulum æquilaterum, est etiam æquiangulum.



DEMONSTRATIO.

Sumto latere B C pro basi erit

Angulus B ∞ C. a
Sumto vero latere C A pro basi, erit etiam a 5. I.
Angulus A ∞ C. a

Ergo erit A ∞ B. b b Ax. I.
Adeoque tres A. B. C. erunt æquales.
Q. E. D.

DEMONSTRATIO.

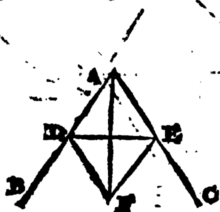
Concipiamus Triangulum A G C esse idem cum D E F; ducaturque B G: & erunt A B G & C B G duo triangula Isoscelia;

a 5.1. Eritque [a] angulus A B G ∞ A G B. } A.
Ut & [a] angulus C B G ∞ C G B. }

b Ax. 1. Angulus A B C ∞ A G C. [b]
Est autem D E F idem cum A G C.
Ergo est A B C ∞ D E F.

PROPOSITIO IX.

Prob. 4. *Datum angulum rectilineum B A C bifariam secare.*



CON-

CONSTRUCTIO.

1. A lateribus AB, AC abscinde [a] partes æquales AD. AE. a 3. 1.

2. Super ducta DE constitue [b] triangulum æquilaterum DEF. b 1. 1.

3. Duc rectam AF.

Dico illam bifariam dividere angulum BAC.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis ADF AEF.

Latus AD ∞ AE } per constructionem.
Latus DF ∞ EF }
Latus AF ∞ AF, quia utrique commune.

Ergo angulus DAF ∞ [c] EAF. Q. E. F. c 8. 1.

COROLLARIUM.

Hinc patet methodus datum angulum secandi in æquales angulos 4. 8. 16. &c. singulas nimirum partes iterum bifariam dividendo.

SCHO-

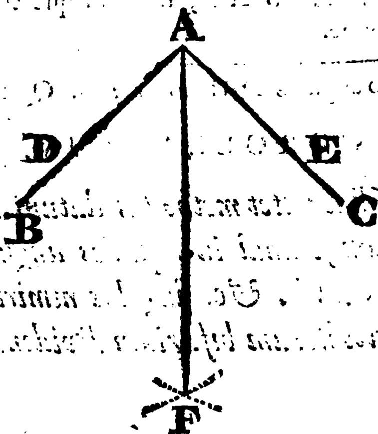
SCHOLIUM.

Poteſt autem propoſitionis conſtructio hoc modo in compendium redigi.

I. *In lateribus AB. AC. ſume æquales AD. AE.*

II. *Centris D & E, quolibetcunque radio deſcribe duos arcus ſe interſecantes in F.*

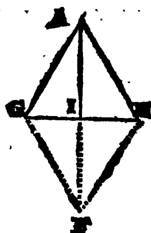
Quo facto recta AF angulum BAC biſecabit.



PRO-

PROPOSITIO X.

Datam rectam terminatam GH bifariam secare. Probl. 5.



CONSTRUCTIO.

1. Super data GH constitue [a] triangulum æquilaterum GAH. a 1. 1.

2. Angulum A divide bifariam [b] recta AF. b 9. 1.

Dico illam lineam GH dividere bifariam.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AIG, AIH.

Latus GA ∞ HA. per constructionem.

Latus

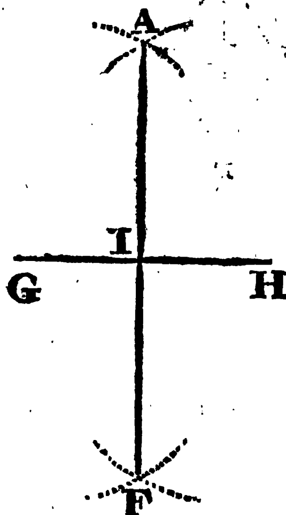
Latus A I ꝏ A I, ſeu utrique commune.

Angulus G A I ꝏ H A I. per conſtructionem.

---

c 4. 1. Ergo [c] Baſis G I ꝏ I H: adeoque linea G H ſecta eſt bifariam. Q. E. F.

SCHOLIUM.



Hujus operationis etiam tale eſt compendium.

Centris G & H, æquali radio utrinque deſcribantur arcus ſe interſecantes in A & F.

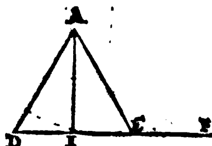
Tam recta A F, biſecabit rectam G H in I.

Notandum etiam pro ſequenti propoſitione rectam A F eſſe perpendicularem ipſi G H ex puncto data I utrimque excitatam.

PRO

PROPOSITIO XI.

Data recta D F a puncto I in ea dato perpendicularem I A excitare. Prol. 6.



CONSTRUCTIO.

1 A puncto I utrinque sume [a] partes inter se æquales I D. IE. a 3. I.

2. Super tota D E constitue [b] triangulum æquilaterum D A E, b 1. I.

3. Duc rectam A I.

Dico illam esse perpendicularem quæsitam.

DEMONSTRATIO.

In triangulis A I D. A I E.

Latus A D ∞ A E. } per constructionem.
Latus I D ∞ I E. }
Latus A I ∞ A I.

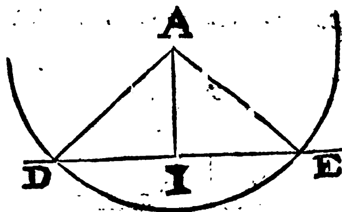
Ergo Angulus A I D ∞ [a] AIE. Adeoque A I est quæsita [b] perpendicularis. a 8. I. b Def. 10.

Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Probl. 7. *Ex dato puncto A extra lineam DE, ad ipsam lineam perpendicularem ducere.*



CONSTRUCTIO.

a Post. 3. 1. Centro A tali radio describe [a] circulum, ut rectam datam secet in duobus punctis D. E.

b Post. 1. 2. Duc [b] rectas AD. AE.

c 10. I. 3. Lineam DE [c] divide bifariam in puncto I.

Dico ductam AI esse quæsitam perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AID. AIE.

Latus AD ∞ AE. quia sunt radii ejusdem circuli.

Latus ID ∞ IE. per constructionem,

Latus AI ∞ AI.

---

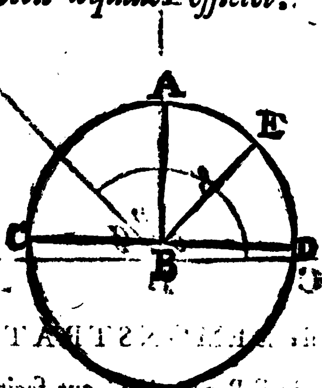
d 8. I. Ergo augulus AID ∞ [d] AIE. Ergo AI

e Def. 10. est quæsita [e] perpendicularis. Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

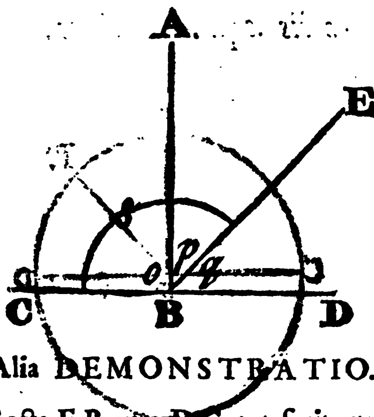
Cum recta linea E B supra rectam C D consistens, angulos facit: aut duos rectos aut duobus rectis æquales efficiet. Theor. 6.



DEMONSTRATIO.

Centro B, quolibet radio, descripto Circulo erit recta C D Diameter istius Circuli, quia transit per Centrum B & utrinque terminatur in peripheriâ: adeoque C A E D erit Semicirculus, [a] qui continet mensuram duorum angulorum a Nota Def. 19.

rectorum: Cum jam idem Semicirculus etiam contineat arcum C E, qui est mensura anguli C B E, una cum arcu E D, mensura anguli E B D, sequitur duos angulos CBE, EBD simul sumtos esse æquales duobus rectis.



Alia DEMONSTRATIO.

Recta E B cum D C aut facit utrimque æquales, adeoque [a] duos rectos, aut non facit.

a Def. 10.

Si non facit, ex puncto B excitetur [b] perpendicularis B A: eruntque duo anguli O & P ╬ Q singuli recti adeoque

b 11. I.

O ╬ P ╬ Q ∞ 2 R.

Atqui ang: S ∞ O ╬ P.

Ergo S ╬ Q ∞ 2 Rectis. Quod E. D.

Satis

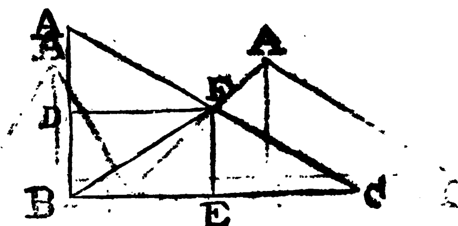
Satis commode hic demonstrari poterunt duo Theoremata sequentia.

THEOREMA I.

In omni Triangulo tres anguli A. B. C. simul sumti æquales sunt duobus Rectis.

DEMONSTRATIO.

In Triangulo Rectangulo.



Divisis lateribus A B. B C bifariam in D & E. ducantur perpendiculares D F & E F; ut & B F.

Tum in Triangulis ADF. BDF. Erit

AD ꝏ BD.

DF ꝏ DF.

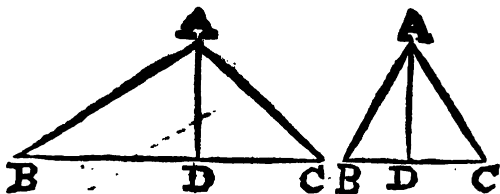
Angulus D ꝏ D.

Ergo ang: A ꝏ DBF. [a] a 4. I.

Eodem modo etiam in Triangulis BEF. CEF; per eandem 4. I. angulus EBF æqualis angulo ECF.

Adeoque per additionem duo anguli A & C ſimul erunt æquales duobus ABF. CBF ſimul ſumtis, hoc eſt angulo ABC: atqui ABC eſt rectus: Ergo A & C ſimul erunt æquales uni recto: Et per conſequens tres Anguli A. B. C. ſimul æquales erunt duobus rectis.

In Triangulo Obliquangulo.

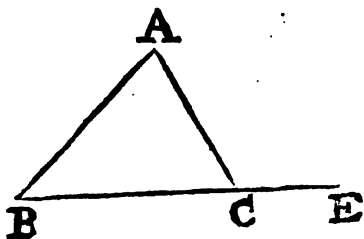


Ducta perpendiculari AD, obtinentur duo Triangula Rectangula ADB. ADC, quorum omnes anguli, juxta præcedentia, æquales ſunt 4 Rectis: a quibus ſi ſubtrahantur duo anguli Recti ad D poſiti, qui ad Triangulum ABC non pertinent, remanebunt tres anguli Trianguli ABC æquales duobus Rectis. Q. E. D.

THEO-

THEOREMA II.

Trianguli ABC uno latere BC producto in E, externus angulus ACE, duobus internis & oppositis A & B simul sumtis æqualis est.



DEMONSTRATIO.

Anguli ACB + ACE ∝ 2 Rectis. [a] a 13. 1.
Anguli ACB + A + B ∝ 2 Rectis.

Ergo ACB + ACE ∝ ACB + A + B.
Demto utrinque communi angulo ACB.

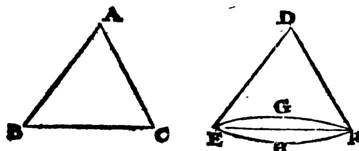
Remanet ACE ∝ A + B. [b] b Ax. 3.

COROLLARIUM I.

Omnes Anguli unius Trianguli ABC simul sumti sunt æquales tribus angulis cujuscunque alterius Trianguli DEF etiam simul sumtis.

Et

Quando duo anguli B. C unius Trianguli æquales sunt duobus alterius E. F. erit quoque tertius A æqualis tertio D.



DEMONSTRATIO.

PARS I.

a Theor. 1. Anguli A + B + C ∞ 2 Rectis. } a
Anguli D + E + F ∞ 2 Rectis.

Ergo A + B + C ∞ D + E + F.

PARS

PARS II.

A ✠ B ✠ C ∞ D ✠ E ✠ F. } b S. b Part. 1.
B ✠ C ∞ E ✠ F.

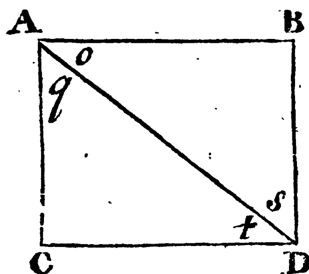
A ∞ D c c Ax. 3.

COROLLARIUM II.

In Triangulo Isoscele rectangulo ACD anguli ad basin Q & T sunt semirecti.

Et

Quadrati ABCD Diameter illius angulos bifariam secat.



DEMONSTRATIO.

PARS I.

In Quadrato ABCD ducta Diametro AD, erunt ACD. ABD Triangula Isoscelia & Rectangula, adeoque in Triangulo ACD, anguli Q & T æquales inter se. a Deinde.

a 5. 1.

b Theor. 1.

Anguli Q + C + T ∞ 2 R. } b. S.
C ∞ 1 R.

Q + T ∞ 1 R.
Atqui Q ∞ T

Ergo Q & T singuli ∞ Semirecto.

PARS II.

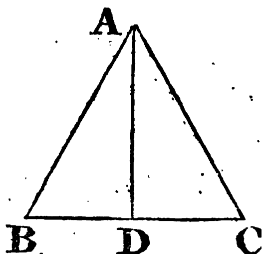
Eodem modo, quo demonstratum est in Triangulo ACD angulos Q & T singulos esse semirectos; etiam probari poterit in Triangulo ABD angulos O & S singulos esse semirectos: Unde jam statim sequitur, quatuor angulos Q. T. S. O. esse inter se æquales; adeoque etiam patet diametrum AD, angulos A & D secare bifariam.

Q. E. D.

CO-

COROLLARIUM III.

Angulus trianguli æquilateri est una tertia duorum rectorum, aut duæ tertiæ unius Rectis.



DEMONSTRATIO.

Anguli A + B + C simul sunt ꝏ 2 R.[a] a Theor. 1.
Atqui tres illi anguli A.B.C. sunt æquales.[b] b Cor. 5. 1.

Ergo singuli sunt ꝏ uni tertiæ 2 Recto-rum.

Deinde angulo A bisecto per lineam A D, facile patet [c] illam esse basi per- c 4. 1.
pendicularem: adeoque cum in Triangulo A D B: angulus A D B sit rectus,

angulos B & B A D ſimul facere unum Rectum ſeu tres tertias unius Recti: Cum jam angulus B A D ſit ſemiſſis anguli B, ſequitur illum eſſe unam tertiam & angulum B eſſe duas tertias unius Recti.

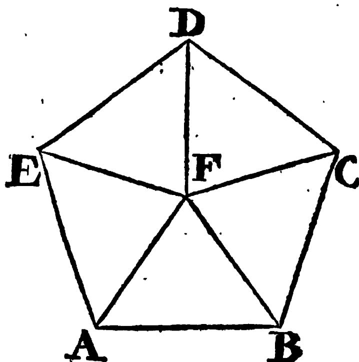
Q. E. D.

SCHOLIUM.

Omnis figura rectilinea dividitur in tot triangula, quot habet latera, demptis duobus, & anguli triangulorum conſtituunt angulos figuræ.

DE

DEMONSTRATIO.



Intra quodlibet polygonum ex: gr: pentagonum ABCDE, ſumatur aliquod punctum F, ex quo ad ſingulos angulos ducantur rectæ; & obtinebuntur tot triangula quot figura habet latera, adeoque hic quinque triangula.

Cum autem unumquodque triangulum contineat duos angulos rectos (per Th: I.) quinque triangula continebunt 10 angulos rectos; a quibus ſi demantur anguli recti quatuor circa F poſiti (13. I.) qui ad figuram non pertinent, remanebunt pro angulis figuræ 6 anguli recti.

Cum

Cum jam duo anguli recti contineantur in uno triangulo, 4 erunt in duobus & 6 in tribus triangulis.

Unde jam concludimus pentagonum ex uno angulo dividi posse in tria triangula: hoc est in tot triangula, quot figura habet latera demptis duobus.

Quæ demonstratio universalis est pro omnibus polygonis; & Tabellæ sequentis est fundamentum.

Latera	3	4	5	6	7
Trianguli	1	2	3	4	5
Anguli recti	2	4	6	8	10

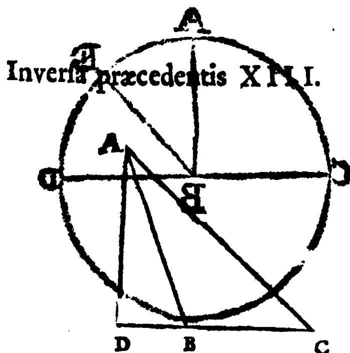
Latera	8	9	10	11	12
Trianguli	6	7	8	9	10
Anguli recti	12	14	16	18	20

Cujus hic est Sensus. Figura Ex: Gr: 6 laterum, dividi potest in 4 triangula; & illius anguli omnes valent 8 rectos.

PROPOSITIO XIV.

Si ad alicujus rectæ A B punctum B duæ rectæ C B. D B non ad easdem partes ductæ, angulos qui sunt deinceps A B D. A B C duobus Rectis æquales fecerint, in directum erunt istæ rectæ, hoc est C B D erit una linea Recta Theor. 7.

Inversa præcedentis XIII.



DEMONSTRATIO.

Ex quolibet puncto A lineæ A B, ad qualibet puncta D & C, ducantur A D.

A D. A C. & obtinebuntur duo Triangula A B D. A B C, quorum

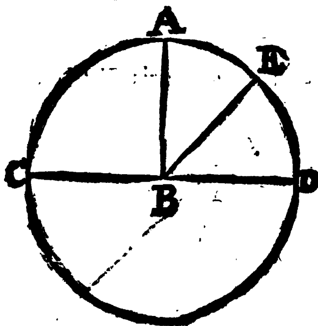
a Schol: præc: 6 Anguli ſimul ∞ 4 Rectis
2 Anguli ad B ∞ 2 Rectis } a S.

---

4 Reliqui; ſeu
3 D A C. & C & D ∞ 2 Rectis.

Ergo D A C eſt Triangulum rectilineum adeoque D B C linea Recta.

Alia DEMONSTATIO.



Iterum Centro B, quolibet radio deſcribatur Circulus B C A E D, cujus arcus C E erit menſura anguli C B E, & arcus E D menſura anguli E B D, cum jam duo anguli C B E & E B D ponantur

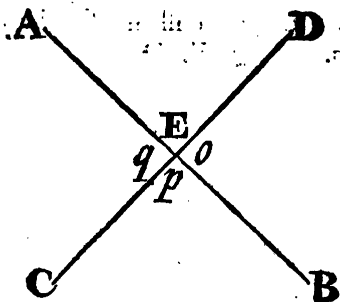
tur æquales duobus rectis, patet duos arcus CE & ED, hoc est arcum CED comprehendere mensuras duorum rectorum, adeoque [a] arcum C E D esse Semicirculum.

[a] Nota Def. 19. L.

Cum autem Semicirculus ab integro Circulo non possit abscindi nisi per Diametrum: Sequitur lineam C B D esse Diametrum istius Circuli; ideoque ex natura Diametri illam esse lineam Rectam. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

Theor. 8. *Si duæ rectæ A B. C D se invicem secent, angulos ad verticem E oppositos, scilicet E & P æquales inter se facient.*



DEMONSTRATIO.

a 13. 1. Anguli E ✠ O ꝏ 2 R.
Anguli P ✠ O ꝏ 2 R. } [a]

b Ax. 1. Ergo [b] E ✠ O ꝏ P ✠ O.
ablato utrimque O.

c Ax. 3. E [c] ꝏ P.

CO

COROLLARIUM I.

Duæ rectæ secantes se mutuo ad punctum intersectionis quatuor angulos faciunt quatuor rectis æquales.

DEMONSTRATIO.

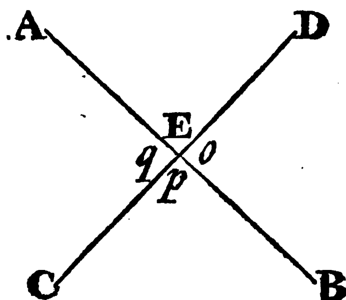
Anguli E ⊞ Q [a] ∝ 2 Rectis. } A [a] 13. I.
Ut & P ⊞ O [a] ∝ 2 Rectis. }

Ergo 4 ang: E ⊞ Q ⊞ P ⊞ O ∝ 4 Rectis.

COROLLARIUM II.

Omnes anguli circa idem punctum constituti æquales sunt quatuor rectis.

DEMONSTRATIO.



Omnes anguli qui possunt constitui intra angulum E, simul sumti sunt ∝ angulo E.

Omnes anguli intra Q ∝ ipsi Q.
Omnes intra P ∝ ipsi P. } A.
Omnes intra O ∝ ipsi O.

Ergo omnes intra 4 istos angulos sunt ∝ ipsis E. Q. P. O.

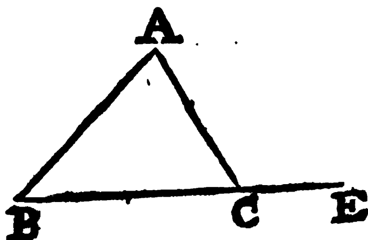
Atqui hi sunt ∝ 4 Rectis.

Ergo etiam omnes isti sunt ∝ 4 Rectis.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Trianguli A B C uno latere A B producto in E, externus angulus AC utrolibet interno & opposito A vel B major est.



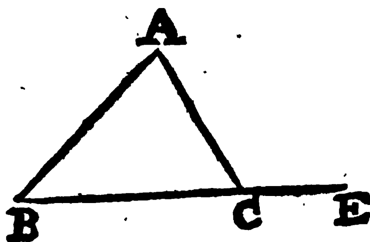
DEMONSTRATIO.

Hæc continetur in Theoremate II. Prop: 13. I.

Si enim externus angulus A C E sit æqualis duobus A & B simul sumtis, ut ibi demonstratum est, necessario sequitur, illum esse majorem utrolibet vel A vel B separatim sumto.

PROPOSITIO XVII.

Trianguli ABC duo anguli B. C. vel duo alii quilibet, quocunque modo ſimul ſumti, duobus rectis ſunt minores.



DEMONSTRATIO.

Hæc ſimiliter continetur in Theoremate I. Prop: 13. I.

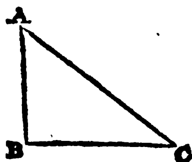
Si enim tres anguli A. B. C. ſimul ſumti ſunt æquales duobus Rectis, ut ibi demonſtratum eſt, neceſſario ſequitur, duos B. C. vel A. B. vel A. C. ſimul ſumtos, debere minores eſſe duobus rectis.

CO-

COROLLARIUM I.

In omni Triangulo, cujus unus angulus fuerit Rectus vel Obtusus, reliqui sunt acuti.

Casus I, in Triangulo Rectangulo.



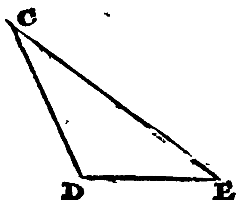
DEMONSTRATIO.

Tres anguli A ╬ B ╬ C ꝏ 2 Rectis. } a S.
Atqui B ꝏ 1 Recto.

a Theor. 1. Propos. 13. I.

Ergo A ╬ C ꝏ 1 Recto.
Et consequenter A & C singuli acuti.

Casus II. in Triangulo Obtusangulo.



Tres anguli C + D + E œ 2 Rectis. } [a] S.
Atqui D < 1 Recto.

Ergo C + E > 1 Recto.

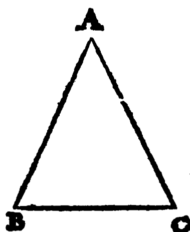
Adeoque a fortiori sequitur angulos C & E singulos esse acutos.

Q. E. D.

CO-

COROLLARIUM II.

Omnes anguli Trianguli æquilateri, & Trianguli Isoscelis anguli supra basin sunt acuti.



DEMONSTRATIO.

Cum omne Triangulum æquilaterum etiam sit Isosceles, consideremus Triangulum appositum ABC: in quo ad basin duo anguli

B ⊞ C sunt > 2 Rectis. a — a 17. 1.

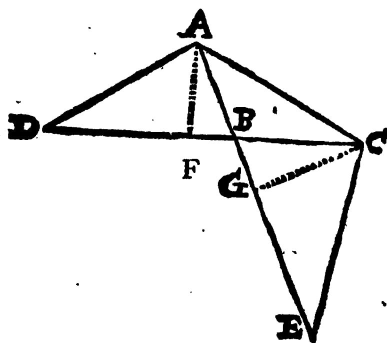
Atqui B ∞ C. b — b 4. 1.

Ergo B & C singuli sunt > 1 Recto.
Et per consequens sunt acuti.

Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

Theor. 11. *Omnis Trianguli ABC maximo lateri AC opponitur maximus angulus ABC.*



DEMONSTRATIO.

Producta CB in D, ut fiat AD ∞ AC. Ut & producta AB in E, ut fiat CE ∞ CA.

Erit

a Th. 11, 13. I.	Angulus	ABC,	< D a
b 5. I,	Atqui	D	∞ ACB. b
	Ergo	ABC	< ACB.

Deinde.

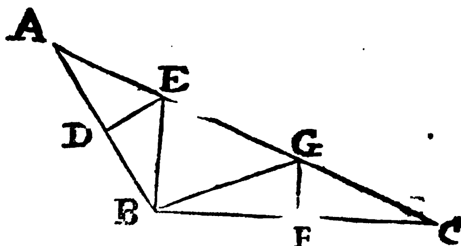
Deinde.

Angulus ABC < E. a

Atqui E œ BAC. b

Ergo ABC < BAC.

Alia DEMONSTRATIO.



E medio duorum laterum AB. BC, ductis perpendicularibus DE. FG: ut & lineis BE. BG.

Duo Triangula ADE. BDE se habent juxta 4. I.

Adeoque angulus A ∞ ABE.

Atqui ABC < ABE.

Ergo ABC < A.

Deinde etiam

Duo Triang: BFG. CFG. sunt juxta 4. I.

Adeoque angulus GBC ∞ C.

Atqui ABC < GBC.

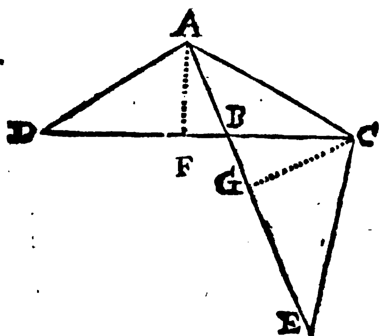
Ergo ABC < C.

Q. E. D.

PROPOSITIO XIX.

In omni Triangulo ABC maximo angulo ABC. opponitur latus maximum AC.

Inversa præcedentis XVIII.



Præter superiorem præparationem anguli DAC. ACE, bisecentur rectis AF. EG: facile patet illas latera DC. AE dividere bifariam per 4. I.

a Nota Def. 4. Tum DA ⊞ AC ⋖ DC. a

Sumtis semissibus, erit.

AC ⋖ FC.

Atqui FC ⋖ BC.

Ergo AC multo ⋖ BC.

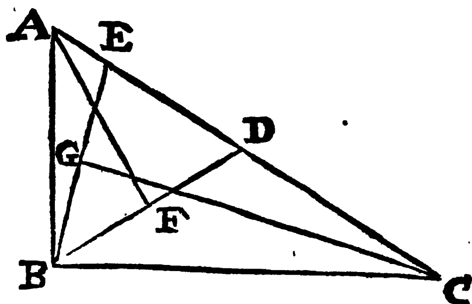
Deinde

Deinde etiam.

A C + C E < A E.
Erit A C < A G.
Atqui A G < A B.

Ergo A C multo < A B.

Alia DEMONSTRATIO.



Bisectis angulis A & C, per lineas rectas A F, C G, ex angulo B maximo ad istas bisecantes ducantur perpendiculares B F D, B G E: Erunt

In Triangulis A F B. A F D.
Anguli A + F ꝏ A + F.

Ergo tertius A B F ꝏ tertio A D F. [a] a Cor. 1. 13. 1.
Adeoque In Triangulo A B D erit
A B ꝏ A D. [b] b 6. 1.
Atqui A C < A D.

Ergo A C < A B.

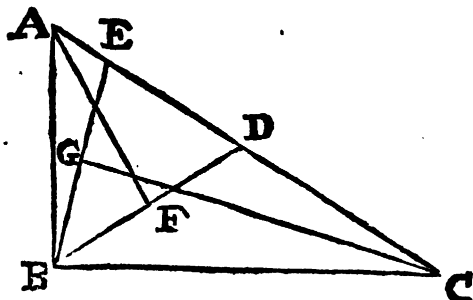
Simi-

Similiter in Triangulis CGB. CGE.
Anguli C ✠ G ꝏ C ✠ G.

Ergo tertius CBG ꝏ CEG.
b 6. 1. Adeoque in Triang: CBE erit.[b]
CB ꝏ CE.
Atqui AC < CE.

Ergo AC < BC.

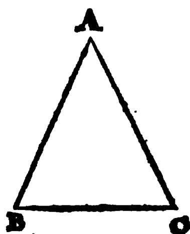
Q. E. D.



PRO-

PROPOSITIO XX.

Trianguli A B C duo latera ſcil. A B. A C. aut alio quocunque modo ſimul ſumpta reliquo B C ſunt majora. Theor. 13.



DEMONSTRATIO.

Propoſitionis hujus veritas immediate fluit ex Archimedæa lineæ Rectæ definitione; Ad oculum enim patet viam per quam linea fracta B A C a B ad C ducta eſt diverſam eſſe, a via lineæ B C, quæ ſtatuitur recta.

Ergo linea recta B C eſt omnium minima, quæ a B ad C poteſt duci.

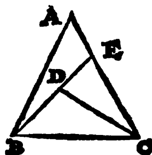
Adeoque etiam linea recta B C erit < linea fracta B A C. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Theor. 14.

Si a terminis unius lateris B C intra triangulum jungantur duæ rectæ B D. C D: hæ lateribus trianguli B A. A C minores quidem erunt; majorem vero angulum B D C. continebunt.



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Per Archimedæam rectæ lineæ definitionem linea B C est omnium brevissima, quæ a B duci possunt ad C. Ergo si a B ad C per aliam viam ducatur linea sive incurvata sive fracta, ut B A C, vel B D C. necessario illa via erit major. Patet autem ad oculum quo punctum fractionis magis

gis a linea B C recedat, eo viam per quam ista linea procedet esse etiam longiorem, adeoque etiam lineam esse majorem.

Atqui punctum fractionis A magis a linea B C recedit quam D. Ergo linea B A C erit major linea B D C.

PARS II.

Externus angulus B D C $<$ D E C. Interno.[a] a 16. 1.

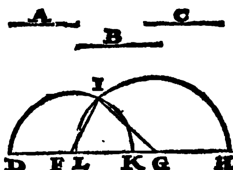
Atqui angulus DEC $<$ A interno.[b] b 16. 1.

Ergo angulus B D C multo $<$ A.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

Probl. 8. *Ex datis tribus rectis A. B. C. quarum duæ quælibet tertia sunt majores, Triangulum constituere.*



CONSTRUCTIO.

1. In infinita linea DH, lineis datis A. B. C. sume æquales DF. FG. GH.

2. Centro F & radio FD describe Circulum DI, & centro G radio GH circulum HI.

3. Ex puncto intersectionis I, ducantur rectæ IF. IG.

Dico FIG esse triangulum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

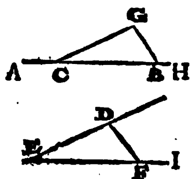
a Def. 15. FI ꝏ [a] DF ꝏ A.
FG ꝏ B
b Def. 15. GI ꝏ [b] GH ꝏ C
} Per constructionem.

Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Ad datæ rectæ A B punctum C Probl. 9.
angulo rectilineo D E F æqualem G C B efficere.



1. In rectis E H. E I sume duo puncta D. F. illaque junge recta linea D F.

2. Tum [a] fiat ad punctum C triangulum G C B, habens latera æqualia lateribus trianguli D E F. a 22. 1.

Dico angulum G C B esse æqualem ipsi D E F.

DEMONSTRATIO.

In triangulis G C B. D E F.

Latus G C ∞ D E	}	Per constructionem.
Latus C B ∞ E F	}	
Latus B G ∞ F D	}	

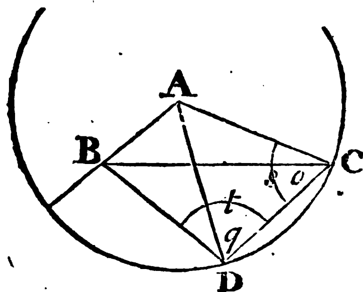
Ergo [b] angulus G C B ∞ D E F. b 8. 1.

Q. E. F.

PROPOSITIO XXIV.

Theor. 15.

Si duo triangula B A C. B A D duo latera B A. A C duobus B A A D æqualia habuerint. alterum alteri; unum vero triangulum habeat angulum istis lateribus contentum B A C majorem altero B A D; habebit quoque basin B C majorem basi B D.



PRÆPARATIO.

1. Centro A per C describe circulum is transibit per D, cum AC. AD ponuntur æquales: Et B C cadit supra D.
2. Ducatur recta D C.

DE-

DEMONSTRATIO.

In Triangulo A D C. latus A D ponitur æquale A C. ergo angulus

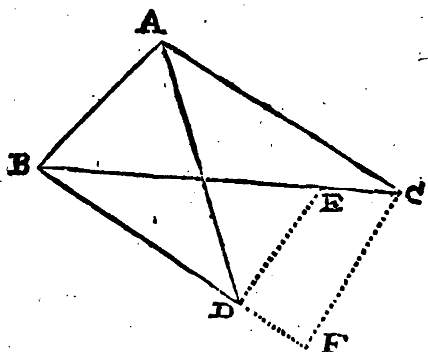
$S \infty Q.$
Atqui $S < O.$
Ergo $Q < O.$

Adeoque T multo $< O.$

Quare cum in triangulo B C D angulus T ſit $<$ O erit latus ſeu Baſis B C major [a] baſi B D. [a] 19. I.

Q. E. D.

Alia DEMONSTRATIO.



Ex D ducta perpendiculari D E, in Triangulo B D E.

Angulus B D E est < E.

Ergo per 19. I.

Latus B E < B D.

Atqui B C < B E.

Ergo B C multo < B D.

Vel hoc modo ad eandem figuram.

Ex C ad B D aut illius productam ductá perpendiculari C F, in Triangulo B F C.

Angulus F < C.

Ergo per 19. I.

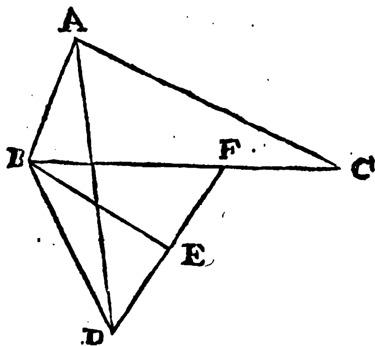
Latus B C < B F.

Atqui B F < B D.

Ergo B C multo < B D.

Tertia

Tertia DEMONSTRATIO.



Angulo DBC bisecto, ad bisecantem BE ex D ducatur perpendicularis DEF: Tum

In Triangulis BED. BEF.

Anguli B ✠ E ꝏ B ✠ E.

Ergo Cor: 13. I.

Tertius D ꝏ Tertio F.

Adeoque per 6. I.

Latus BF ꝏ BD.

Atqui BC < BF.

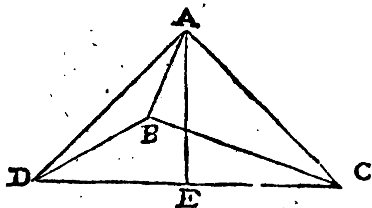
Ergo etiam BC < BD.

PROPOSITIO XXV.

Theor. 16.

Si duo Triangula ABC. ABD. duo latera AB. AC. duobus lateribus AB. AD æqualia habuerint, alterum alteri; unum vero Triangulum habeat basin BC majorem altera BD; illud habebit quoque angulum BAC majorem BAD.

Inversa præcedentis XXIV.



DEMONSTRATIO.

Ducatur recta DC & angulus DAC bisecetur linea AD.

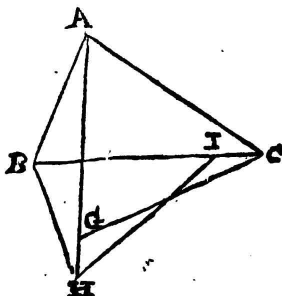
Tum

Tum angulus EAD ∞ EAC.
Atqui EAD < BAD.

Ergo etiam EAC < BAD.
Adeoque BAC multo < BAD.

Et eadem est demonstratio sive punctum B cadat in DC sive infra illam.

Alia DEMONSTATIO.



Hic duo Triangula Propositionem spectantia, sunt BAC. BHI, in quibus BA ∞ BH AC ∞ HI: Basis BC < Basi BI: demonstrandum est quod sit angulus BAC < BHI.

Tum ducta AH. ut & CG ∞ IH seu CA: Erunt ABH. ACG Triangula Isoscelia.

Adeoque angulus CGA ∞ CAG.
Atqui CGA < IHA.

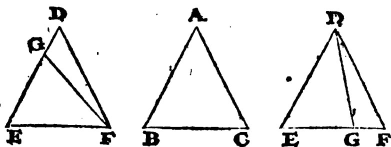
Ergo CAG < IHA.)
Angulus BAH ∞ BHA.) A.

Erit angulus BAC < BHI hoc est D.

 PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Theor. 17. *Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, five quod adjacet æqualibus angulis, five quod uni æqualium angulorum subtenditur; Illa & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo.*



DEMONSTRATIO.

CASUS I.

Si BC ponatur ∞ EF: tum hæc propositio convenit cum præcedente VI; adeoque eadem est Demonstratio.

CA-

CASUS II.

Si AB ponatur ∞ DE: quia jam anguli B. C ponuntur æquales E. F. etiam (Coroll: 13. I.) erit tertius A ∞ tertio D: adeoque rursus per Casum I in istis Triangulis omnia erunt æqualia.

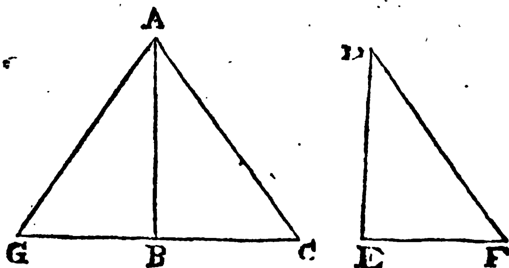
SCHOLIUM.

Si duo Triangula ABC. DEF. duo latera AB. AC duobus lateribus DE. DF. æqualia, alterum alteri: ut & angulos B. E, æqualibus lateribus AC. DF oppositos æquales; ut & præterea angulos A. D, æqualibus lateribus comprehensos, similes habeant; Illa reliqua omnia habebunt æqualia.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

In Triangulis Rectangulis.



Triangulum DEF concipiatur applicatum ad Trianguli ABC latus AB, sed situ contrario, ut sit idem cum Triangulo ABG.

Quo facto GBC erit linea recta, quia
a 14. I. duo anguli ad B sunt recti: [a]

Deinde quia AG. AC sunt æqualia
b 5. I. erit angulus G ∞ C. [b]

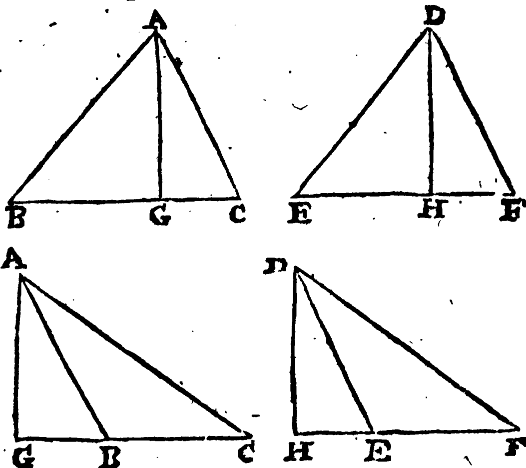
Adeoque tertius GAB ∞ Tertio
c Cor. 13. I. CAB[c] ∞ EDF.

Ergo duo Triangula ABC. & ABG
d 4. I. seu DEF habent omnia æqualia. [d]

CA-

CASUS II.

In Triangulis Obliquangulis.



Ductis Perpendicularibus A G. D H.
In Triangulis A B G, D E H, erit
Angulus G ∞ H.
A B G ∞ D E H.
Latus A B ∞ D E.

Ergo A G ∞ D H. e e 26. I.

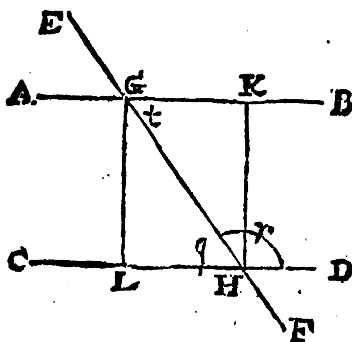
Quare duo Triangula AGC. DHF, ſeſe habent juxta Caſum I. hujus Scholii: Ergo, erit angulus C ∞ angulo F: & conſequenter per 26. I. in Triangulis A B C. DEF omnia erunt æqualia. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Theor. 18.

Si in duas rectas AB. C D recta E F incidens angulos alternos T. Q *æquales faciat, rectæ inter se erunt parallelæ.*



DE-

DEMONSTRATIO.

Ex G & H ductis perpendicularibus GL. HK, Erit

In Triangulis GLH. HKG.

Angulus L ∞ K.

Q. ∞ T.

Latus GH. commune.

Ergo per 26. I.

Latus GL. ∞ HK.

Adeoque per illa, quæ supra ad Definitionem parallelarum dicta sunt, erunt lineæ AB. CD parallelæ.

Q. E. D.

SCHOLIUM.

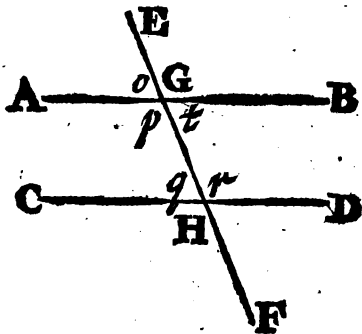
Cum jam demonstratum sit lineas AB. CD esse parallelas, & triangula GLH. HKG omnia habeant æqualia, consequenter etiam patet lineas GK. LH. a perpendicularibus GL. HK abscissas, inter se esse æquales; id quod Tacquetus inter Axiomata numerat.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Theor. 19.

Si in duas rectas AB. CD recta EF incidens faciat externum angulum O æqualem interno & ad easdem partes opposito Q: Aut si faciat duos internos & ad easdem partes P. Q. simul æquales duobus rectis: parallelæ erunt inter se rectæ AB. CD.



DE.

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Angulus T ꝏ O. [a] — a 15. I.
Atqui Q ꝏ O per propositionem.

Ergo T ꝏ Q. [b] — b Ax. 1.
Adeoque lineæ A B. C D. sunt parallelæ. [c] — c 27. I.

PARS II.

Anguli O + P ꝏ 2 Rectis. [d] — d 13. I.
Atqui Q + P ꝏ 2 Rectis per Prop.

Ergo [e] O + P ꝏ Q + P. demto utrinque P. — e Ax. 1.

O ꝏ Q.

Ergo, per partem primam hujus, lineæ A B. C D sunt parallelæ.

Q. E D.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

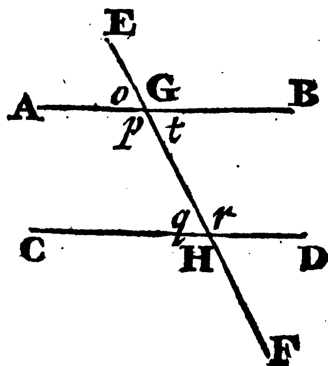
Theor. 20.

Si in rectas parallelas A B. C D recta E F *incidat.*

1. *Alterni anguli T. & Q inter se erunt æquales.*

2. *Externus* G *erit æqualis interno & ad easdem partes opposito R.*

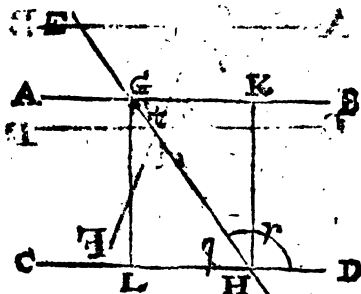
3. *Duo interni & ad easdem partes* T. R. *simul erunt æquales duobus rectis.*



DE

DEMONSTRATIO.

PARS I.



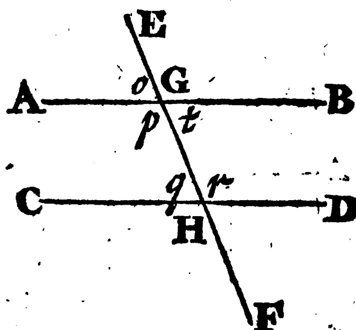
Ductæ perpendiculares GL, HK, erunt æquales inter se, juxta ea, quæ ad definitionem linearum parallelarum dicta sunt. Adeoque

In Triangulis	GLH.		HKG.
Latus	GL	∞	HK.
	GH	∞	GH.
Angulus	L	œ	K.

Ergo angulus T ∞ Q. [b]

[b] Schol. 26. I.

PARS II.



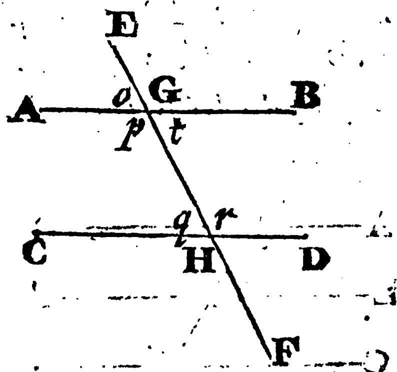
c 13. I.   G + T ꝏ 2 Rectis. }[c]
R + Q ꝏ 2 Rectis.

---

d Ax. I.   S { Ergo G + T ꝏ R + Q.[d]
e per partem I.   Atqui T ꝏ Q.[e]

---

f Ax. 3.   Ergo G ꝏ R.[f]



G G + T ∞ 2 Rectis. g — g 13. I.

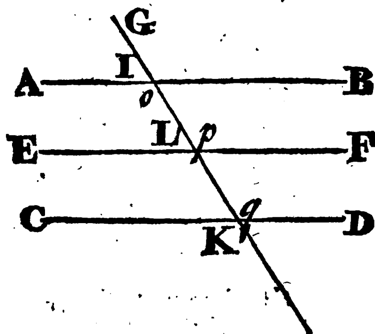
Atqui G œ R. h — h Per partem 2.

Ergo R + T ∞ 2 Rectis.

Q. D. E.

PROPOSITIO XXX.

Theor. 21. *Si duæ rectæ AB. CD. sint parallelæ ad eandem EF; illæ erunt quoque inter se parallelæ.*



DEMONSTRATIO.

Ducatur per tres datas rectas linea GK.

a 29. 1. Angulus O ∞ P. [a] propter parallelas AB. EF.

Angulus Q ∞ P. [a] propter parallelas CD. EF.

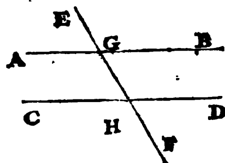
Ergo ang. O ∞ Q alterno.

b 27. 1. Adeoque AB. CD sunt [b] inter se parallelæ.

PRO-

PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum G ducere lineam AB, quæ datæ CD sit parallela. Probl. 10.



CONSTRUCTIO.

1. Ex puncto G ad datam CD duc rectam GH sub quolibet angulo GHC.
2. Ad lineæ GH punctum G fac [a] angulum HGB æqualem angulo GHC. a 23. I.

Dico BG productam esse ipsi CD parallelam.

DEMONSTRATIO.

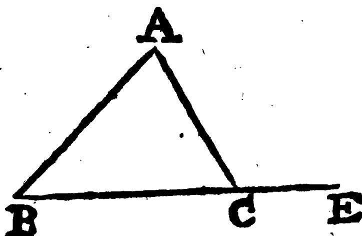
Anguli alterni GHC HGB sunt æquales per constructionem. Ergo [b] lineæ AB. CD. sunt parallelæ. b 27. I.

PROPOSITIO XXXII.

Theor. 32. *Omnis Trianguli uno latere producto.*

1. *Externus angulus duobus internis & oppositis æqualis est.*

2. *Trianguli tres anguli simul sumti duobus rectis æquales sunt.*

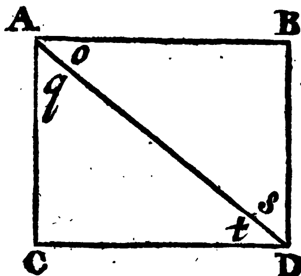


Duæ hæ partes idem dicunt, quod duo Theoremata in Scholio 13. I. demonstrata, quæ videri poterunt; cum omnibus suis Corollariis.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Rectæ AC. BD quæ æquales & parallelas A B. C D ad easdem partes conjungunt, illæ & ipsæ æquales sunt & parallelæ. Theor. 23.



DEMONSTRATIO.

Ducta Diametro A D, in Triangulis B A D. A D C.

Latus A B ∞ C D per propositionem.

Angulus [a] O ∞ T propter parallelas AB. CD. [a] 29. 1.

Latus AD ∞ AD.

Ergo per 4. omnia sunt æqualia, nim.

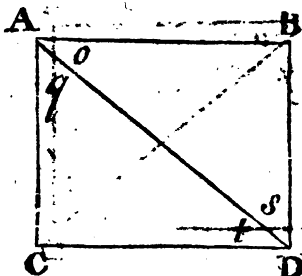
Latus AC ∞ BD.

Angulus Q ∞ S, adeoque [b] A C & BD parallelæ. [b] 27. 1.

PROPOSITIO XXXIV.

Theor. 24. *Parallelogrammi ABCD opposita latera & anguli æqualia sunt; ipsumque a Diametro secatur bifariam.*

DEMONSTRATIO.



In Triangulis BAD. ADC.

Angulus [a] O ∞ T propter parallelas AB. CD. a 29. I.

Angulus [a] S ∞ Q propter parallelas AC. BD.

Latus AD ∞ AD.

Ergo per 26. omnia sunt æqualia; sc:

Latus AB ∞ CD.

Latus BD ∞ AC.

Angulus B ∞ C.

Adeoque per 4. Triangula BAD. ADC inter se sunt æqualia.

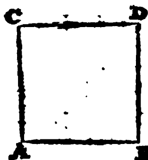
Voca-

SCHOLIUM I.

Vocatis in auxilium illis, quæ antea ad Definitionem 5. Libri I. de generatione Superficiei dicta sunt, & iis quæ postea ad definitionem 1. Libri II. ab hisce non dependentem dicentur, facile ex hac propositione elicitur dimensio & area parallegrammi rectanguli, quæ producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum, seu quæ unum ex angulis rectis comprehendunt.

Sic Ex: Gr: si parallelogrammi rectanguli A C D B. latus A C ponatur 4 pedum, C D 6 pedum; multiplicetur 4 per 6, & obtinebitur productum 24 pedum quadratorum pro area parallelogrammi rectanguli.

Quidem autem in Quadrato omnia latera sunt æqualia, patet ad inveniendam illius aream nihil aliud opus esse, quam ut unum ex ejus lateribus per se ipsum multiplicetur.



Quare si in Quadrato A B C D, latus C A ponatur 4 pedum, multiplicando 4 per se ipsum, veniet productum 16 pedum quadratorum pro area quadrati A B C D.

SCHOLIUM II.

Vide Figuram Pag: 120.

Cum ex hac propositione pateat diametrum parallelogrammi illud dividere bifariam, patet si iterum ponatur parallelogrammum A C D B esse rectangulum, triangulum rectangulum esse semissin istius parallelogrammi, adeoque pro A C, C D. sumtis iisdem numeris 4, & 6. semissin superioris producti 24. scilicet 12 facere aream trianguli istius rectanguli A C D.

Quia autem ista Area 12 triplici multiplicationis forma obtineri potest, scilicet multiplicando vel 2 per 6: vel 4 per

per 3; vel 4 per 6 & productum 24 bissecando; hinc etiam triplex oritur regula cujus ope inveniatur Area Trianguli A C D, quod hic tantum statuimus Rectangulum: multiplicando nimirum.

Vel dimidiam altitudinem seu perpendicularem A C per totam basin C D.

Vel totam altitudinem A C per dimidiam basin C D.

Vel totam altitudinem A C per totam basin C D, & productum, quod dabit aream totius parallelogrammi rectanguli A C D B, bisecando, ut obtineatur area dimidii parallelogrammi, hoc est, per hanc Prop: 34. Trianguli rectanguli A C D.

SCHOLIUM III.

Quoniam quicquid per Multiplicationem compositum est, iterum per contrariam Divisionem in sua principia resolvitur, etiam facile in omni parallelogrammo rectangulo cognita area, & alterutro latere, alterum potest inveniri.

Vide Figuram Pag: 120.

Sic appositi nostri parallelogrammi A C D B, area inventa est pedum quadrato-

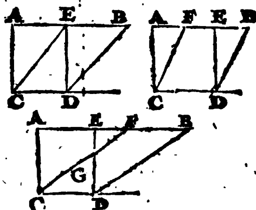
dratorum 24, si jam ponatur cognita basis CD 6 pedum, & ista area 24 dividatur per basin 6, invenientur 4 pedes pro altitudine seu perpendiculari A C: quia scilicet antea productum seu area 24 generata fuit ex multiplicatione 4 per 6.

Similiter cum Trianguli Rectanguli A C D area reperta sit pedum quadratorum 12. (utpote dimidia areæ parallelogrammi A C D B) si iterum ponatur cognita basis C D 6 pedum, & tum area 12, dividatur per dimidiam basin 3, invenientur etiam 4 pedes pro perpendiculari A C: quia antea hujus trianguli area 12 generata fuit ex multiplicatione 4 per 3.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

Parallelogramma AD. FD. super eadem basi CD & inter easdem parallelas AB. CD constituta sunt æqualia. Theor. 25.



DEMONSTRATIO.

Tres hic occurunt casus, qui totidem figuris exhibentur.

Ad Figuram I.

Latus AE ꝏ CD
Latus EB ꝏ CD } 34. I.
Ergo AE [b] ꝏ EB. b Ax. I.

Considerentur jam duo triangula EAC. BED, in quibus

Latus EA ꝏ BE.
Angulus A ꝏ BED propter pa-pallelas AC. ED.
Latus AC ꝏ ED per 34. I.

Ergo

b 4. I. Ergo Triang. [b] EAC ∞
Triang. BED } Adde.
Triang. ECD ∞ ECD

Parallelogr. EACD ∞ Parall. BECD.

Ad Figuram II.

Latus AE ∞ CD.
Latus FB ∞ CD. } 34. I.

Ergo AE ∞ FB.
FE FE. } S.

AF œ EB.

Quare jam in Triangulis FAC. BED.
Latus FA ∞ BE.
Angulus A ∞ BED. propter parallelas AC. ED.
Latus AC ∞ ED. per 34. I.

---

c 4. I. Ergo Triang. [c] FAC ∞ BED.
Trap. EFCD. ∞ EFCD. } A.

Parallelog. AD ∞ Parall. FD.

Ad Figuram III.

Latus AE ∞ CD
Latus FB œ CD. } 34. I.

Ergo AE ∞ EB
EF. EF. } A.

AF œ EB.

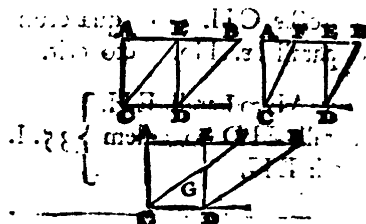
Quare

Quare iterum in triangulis F A C, B E D.

Latus F A ∞ B E
Angulus A ∞ B E D. ob parallelas A C. E D.
Latus A C ∞ E D. per 34. I.
Ergo d. Triang. F A C ∞ Triang. B E D. } S.   d 4. I.
Triang. F E G ∞ F E G. }

Trapezium E A C G ∞ Trapezio B F G D. } A.
Triang. G C D ∞ G C D }

Parallelogr. A D ∞ Parallel. E D.
Q. E. D.



PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

Theor. 26. *Parallelogramma AE. HD super æqualibus basibus CE. FD, & inter easdem parallelas AB. CD constituta, inter se sunt æqualia.*



DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ, CH. EB, quæ erunt a 33. I. [a] æquales & parallelæ. Hoc facto erit.

Parallelogr. AE ∞ Parall. EH.
Atqui Parall. HD ∞ eidem Parall. EH. } 35. I.

b Ax. I. Ergo [b] Parall. AE ∞ Parall. HD.
Q. E. D.

SCHO-

SCHOLIUM I.

Ad Prop: 35. 36.

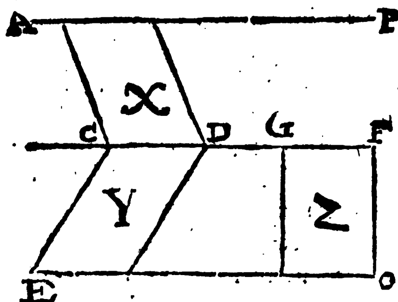
Ex hisce propositionibus sequitur non tantum Parallelogrammorum rectangulorum in specie, sed etiam generaliter omnium Parallelogrammorum aream inveniri multiplicando basin per perpendicularem ab uno latere ad alterum ductam: quia semper potest constitui parallelogrammum rectangulum super alterius obliquanguli basi & inter easdem parallelas; id quod priori per 35: I. æquale est. Cum autem antea ostensum sit parallegrammi rectanguli aream oriri ex multiplicatione baseos per perpendicularem, manifesto sequitur & hujus aream eodem modo inveniri.

SCHOLIUM II.

Si Parallelogramma constituta sint inter diversa paria parallelarum, scilicet inter A P. C F & inter E O. C F. æqualibus intervallis à se invicem distantium,

sive super eadem basi C D, ut X. Y. sive super æqualibus basibus C D. G F, ut X, Z; erunt illa inter se æqualia.

DEMONSTRATIO.



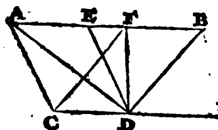
Concipiamus lineam E O circumvolvi circa lineam C F. illa necessario coincidet cum A P, quia A P & E O æquali intervallo à linea C F distant.

Quo facto parallelogramma X & Y erunt inter easdem parallelas; & super eadem basi, adeoque per Prop: 35. æqualia; Parallelogramma vero X & Z, erunt inter easdem parallelas & super basibus æqualibus, adeoque per Prop: 36. æqualia.

SCHO-

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula ACD. FCD super eadem basi CD & inter easdem parallelas AB. CD. constituta, sunt inter se aequalia. Theor. 27.



DEMONSTRATIO.

Ductis DE [a] parallela ipsi CA: ut & DB parallela CF, erit. a 31. I.

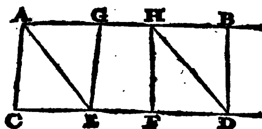
Parallelogr. [b] EC ∞ Parallelogr. BC. b 35. I.

Atqui Parall. EC semissis est Triangulum ACD. } 34. I.
Et Parallelogr. BC semissis est Triangulum FCD. }

Ergo [c] triang. ACD ∞ triang. FCD. c Ax. 7.
Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theor. 28. *Triangula ACE. HFD super æqualibus basibus CE. FD. & inter easdem parallelas AB. CD constituta, inter se sunt æqualia.*



DEMONSTRATIO.

a 31. 1. Ducatur [a] EG parallela ipsi AC & DB ipsi FH. Tum [b] Parall. CG ∞ Parall. FB.
b 36. 1.

Atqui dimidium CG est Triang. ACE.
Et dimidium FB est Triang. HFD. } 34. 1.

---

c Ax. 7. Ergo [c] triang. ACE ∞ triang. HFD.

SCHO-

SCHOLIUM.

Ad Prop: 37. 38.

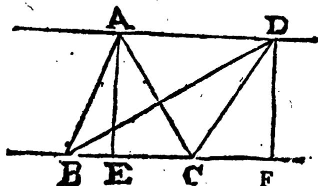
Ex hisce propositionibus sequitur non tantum Triangulorum Rectangulorum in specie, sed universaliter omnium Triangulorum aream inveniri multiplicando dimidiam basin per perpendicularem ab angulo opposito in basin aut ejus productam cadentem : quia semper potest constitui triangulum rectangulum super alterius trianguli obliquanguli basi & inter easdem parallelas; id quod priori per 37. I. æquale est. Cum autem antea ostensum sit Trianguli rectanguli aream oriri ex multiplicatione dimidiæ baseos per perpendicularem, sequitur etiam trianguli obliquanguli aream eadem multiplicationis forma inveniri.

PROPOSITIO XXXIX.

Theor: 29.

Si triangula A B C. D B C sint æqualia, & super eadem basi B C & ad easdem partes constituta: illa erunt quoque inter easdem parallelas. Hoc est A D erit parallela B C.

Inversa Prop: 37.



DEMONSTRATIO.

Ducantur duæ perpendiculares AE. DF.

Area trianguli A B C invenitur multiplicando perpendularem A E per dimidiam basin B C. a

a Schol: 34. I. Area trianguli D B C reperitur multiplicando perpendicularem D F, per eandem dimidiam basin B C. a

Quia

Quia jam Triangula A B C. D B C ſunt æqualia, erit Productum ex A E in dimidiam B C ∞ Producto ex D F in eandem dimidiam B C.

Si jam utrumque productum dividatur per eandem dimidiam B C.

Erit Perpendicularis AE ∞ perpend: DF. Adeoque per ea quæ ad Definit: 35. dicta ſunt.

Linea A D erit parallela lineæ B F.

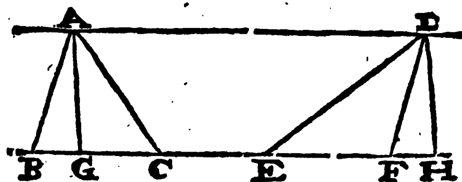
Q. E. D.

PROPOSITIO XL.

Theor. 30.

Si triangula ABC. DEF sint æqualia, & super æqualibus basibus BC. EF. & ad easdem partes constituta: Illa erunt quoque inter easdem parallelas AD. BF.

Inversa Prop: 38.



DEMONSTRATIO.

Ducantur duæ perpendiculares AG. DH.

Area trianguli ABC oritur ex multiplicatione perpendicularis AG per dimidiam basin BC. [a]

a Schol. 34. I.

Area trianguli DEF invenitur multiplicando perpendicularem DH per dimidiam basin EF [a], quæ est æqualis dimidiæ basi BC.

Quia

Quia jam Triangula A B C. D E F ponuntur æqualia; erit Productum ex A G in dimidiam B C ∞ producto ex D H in dimidiam E F seu eandem dimidiam B C.

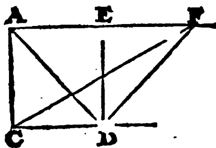
Quare si dividatur hinc per dimidiam B C & inde per dimidiam E F.

Erit perpendicularis AG ∞ perpend. DH.
Adeoque iterum per dicta ad Definit: 35.
Linea A D erit parallela B F.
Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

Theor. 31.

Si parallelogrammum A E C D communem cum triangulo F C D basin C D habuerit, & in iisdem parallelis A F, C D fuerit: parallelogrammum erit duplum trianguli.



DEMONSTRATIO.

a 37. I. Ducta A D erit triang. [a] A C D ∞ triang. F C D.

b 34. I. Atqui [b] parallelogr. A E C D est duplum triang. A C D.

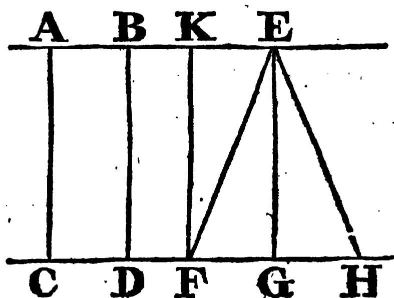
Ergo etiam parall. AECD est duplum triang. F C D.

SCHO-

SCHOLIUM I.

Imo etiam si parallelogrammum ABDC cum triangulo EFG æquales bases CD. FG. habuerit & in iisdem fuerit parallelis, parallelogr. trianguli duplum erit.

DEMONSTRATIO.



Ducta FK parallela GE, erit.

Parallelog. AD ∞ Parall. KG. 36. I.

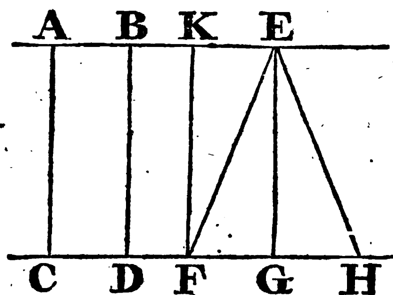
Atqui Parall. KG est duplum Trianguli EFG. per 34. I.

Ergo etiam Parall. AD ejusdem trianguli duplum erit.

SCHO-

SCHOLIUM II.

Si Trianguli EFH cum Parallelogr. AD inter easdem parallelas existentis, basis FH fuerit dupla baseos CD erit triangulum EFH æquale parallegr. AD.



DEMONSTRATIO.

Triang. EFG ∞ triang. EHG (38. I.) Ergo totum triangulum EFH est duplum trianguli EFG: atqui modo demonstratum est esse parallegr. AD duplum ejusdem trianguli EFG. Ergo erit parall. AD ∞ triang. EFH.

PRO-

PROPOSITIO XLII.

Dato Triangulo ABC æquale Parallelogrammum CF construere, habens angulum C æqualem angulo dato D. Probl. 11.

CONSTRUCTIO.

1. Productæ basi BC ex A parallela ducatur [a] AF. a 31. 1.

2. Sumta CK æquali dimidiæ basi BC, ex C ducatur CE, ut sit angulus ECK æqualis D. [b] b 23. 1.

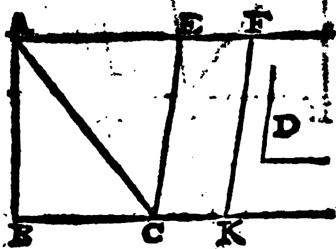
3. Ducatur KF parallela CE. [a]

Dico CEFK esse parallelogrammum quæsitum.

DE

DEMONSTRATIO.

Hæc nititur Scholio II. Prop: 41. I. quia triangulum ABC cum parallelogrammo CF inter easdem parallelas existens basin BC habet duplam baseos CK: adeoque triangulum ABC erit æquale parallelogrammo CF; quod per constructionem etiam angulum C habet æqualem angulo D.



PRO-

PROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi A C Theor. 32.
complementa A G. G C. sunt inter se æqualia.



DEMONSTRATIO.

S	Triang. B A D ꝏ Triang. B C D. Triang. BFG ✠ GHD ꝏ tri. BKG ✠ GED	34. 1.

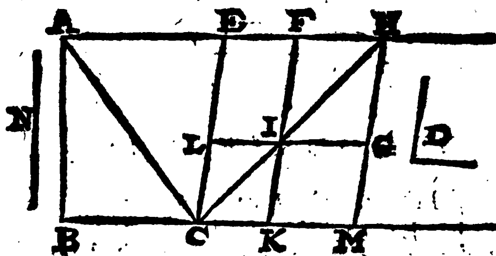
Remanet complem. A G ꝏ [a] compl. G C. Q. E. D.

a Ax. 4.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

Probl. 12. *Ad datam rectam N dato Triangulo A B C æquale parallelogrammum C G applicare, habens angulum C æqualem angulo dato D.*



CONSTRUCTIO.

1. Facto per 42. I. parallelogrammo C F, æquali Triangulo A B C, quod habeat angulum C æqualem D, sumatur CM æqualis N.

a 31. I. 2. Ex M ducta a MH parallela KF, ducatur CH, secans KF in I.

3. Per

3. Per I ducatur L I G parallela C M. [a] a 31. 1.
Dico C G esse parallelogrammum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

In Parallelogrammo E M.		
Complementum E I ∞ [b] I M.	A.	b 43. 1.
Parallelogr: C I ∞ C I.		

Parall: C F ∞ C G ∞ Triang: A B C.

Cum jam angulus L C M sit æqualis angulo dato D, & latus C M æquale datæ N; patet parallelogrammum C G quæsito satisfacere.

NOTA.

Si contingat lineam datam esse minorem dimidia basi B C, seu C K, tunc illa sumi poterit in linea C E; qualis hic sit C L.

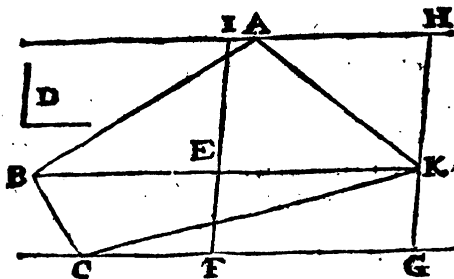
Tum ex L ducatur L G parallela B C, secans K F in I.

Deinde per I ex C ducatur recta C I H & tum H M parallela F K, secans L G in puncto G.

Quo facto obtinebitur idem parallelogrammum C G, quod propositioni satisfacere jam modo demonstratum est.

PROPOSITIO XLV.

Probl. 13. *Dato Rectilineo ABCK æquale Parallelogrammum FH constituere, habens angulum F angulo dato D æqualem.*



CONSTRUCTIO.

1. Ductæ Diagonali B K. per A & C ducantur parallelæ A H. C G. a

a 31. I.

2. Bisecta b B K in E. per E ducatur recta I E F, faciens angulum E (qui per 29 I æ est ipsi I F G) æqualem D. c

b 10. I.

c 23. I.

3. Per K ducatur Recta H K G parallela ipsi I F. a

Dico F H esse parallelogrammum quæsitum.

DE

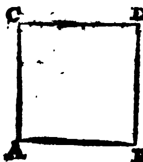
DEMONSTRATIO.

Parallelogr: E H[d] ∞ Triang: A B K	A.	d Schol.
Parallelogr: F K[d] ∞ Triang: B C K		11. 41. I.

Parallelogr: F H ∞ Rectilineo ABCK.
Q. E. D.

Probl. 14. PROPOSITIO XLVI.

Super data recta AB quadratum AB DC describere.



CONSTRUCTIO.

1. Ab extremitatibus A & B erige
a 11. I. duas perpendiculares [a] A C. B D. quæ ſint æquales ipſi A B.

2. Ducatur recta C D.

Dico A B C D eſſe quadratum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

a Ax. 1. Latus A C [a] ∞ B D, quia utrumque eſt ∞ eidem A B.

b 28. I. Latus A C eſt parallelum [b] B D, propter angulos rectos A. B.

Ergo

Ergo [c] A B & C D sunt parallelæ & æquales, adeoque omnia latera æqualia eidem A B, inter se sunt æqualia & parallela. c 33. 1.

Pro angulis.

In parallelogrammo A D anguli A. B. sunt recti. Ergo [d] etiam oppositi D. C sunt recti. d 34. 1.

Ergo A B D C est quadratum.

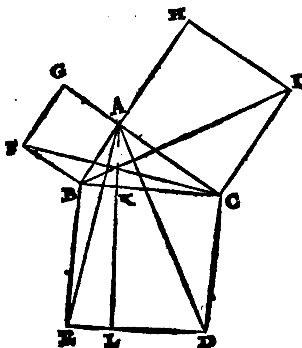
Q. E. D.



PROPOSITIO XLVII.

Theor. 33.

In omni triangulo rectangulo BAC quadratum lateris BC, quod recto angulo opponitur, æquale est duobus simul reliquirum laterum BA. AC. quadratis.



DEMONSTRATIO I.

Ex A ducta AL parallela lateri BE, lateris BC quadratum BD dividit in duo parallelogramma BL. KD:

Si jam demonstratum sit Parallelogr: KD

KD esse ∞ quadrato AI, ut & parallelogr: BL esse ∞ quadrato AF, peracta res erit.

Pro Primo.

Ductis AD. BI } ang. BCD ∞ ACI. quia uterque rectus.
A } ang. ACB. ∞ ACB.

Ang. ACD ∞ BCI.

Ergo in triangulis ACD. BCI.

Latus AC ∞ CI. } quia sunt latera eorundem quadratorum.
Latus CD ∞ BC. }
Ang. ACD ∞ BCI.

Ergo [a] Triang. ACD triang. BCI. a 4. I.

[b] Atqui parallelogr. KD est duplum triang. ACD. } Quia sunt in iisdem basibus & parallelis. b 41. I.
[b] Et parallelogr. AI duplum triang. BCI. }

Ergo [c] parall. KD ∞ parall. seu quadrato AI. c Ax. 6.

Pro Secundo.

Ductis AE. FC. } Ang. CBE ∞ ABF. quia uterque rectus.
A } Ang. ABC. ABC.

Ang. ABE. ∞ FBC.

 Quare

Quare in triangulis A B E. F B C.

Latus A B ∞ B F. } Utpote latera eorundem quadratorum.
Latus B E ∞ B C. }

Ang. A B E ∞ F B C.

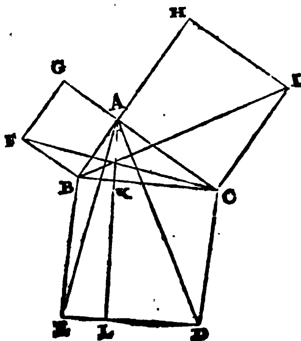
Ergo Triang. ABE [d] œ Triang. FBC.

d 4. I. [e] Atqui parallelogr. B L est duplum triang. A B E. } Quia sunt in iisdem basibus & parallelis.
e 41. I. [e] Et parallelogr. AF duplum triang. F B C. }

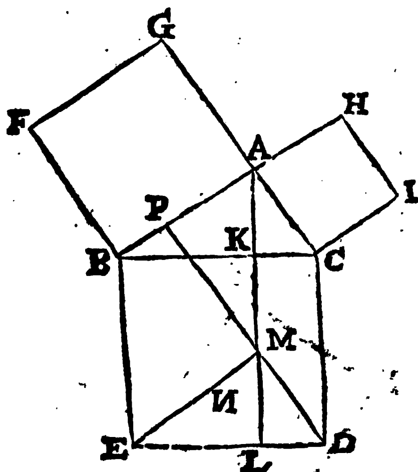
Ergo parall. B L ∞ parall. seu quadrato A F. } A
f Ax. 6. Atqui antea parall. K D ∞ quadrato A I. }

Ergo Quadratum B D ∞ duobus quadratis. A F. A I.

Q. E. D.



DEMONSTRATIO II.



Ex eadem Antiquorum figura satis commode talis erui potest Demonstratio.

Ducatur AL parallela CD. ut & EM, DMP parallelæ ipsis BA, CA.

Tum facile patet tria Triangula ABC. MED. PMA. sibi esse æquangula: adeoque esse æqualia AB. ME. PM: ut & AC. MD. AP.

Jam.

a 35. I. ▱ DK ꝏ [a] ▱ DA.

Atqui.

□ AI [b] ꝏ eidem ▱ DA.

---

b Schol: 11. 36. I.

Ergo per Ax: I.

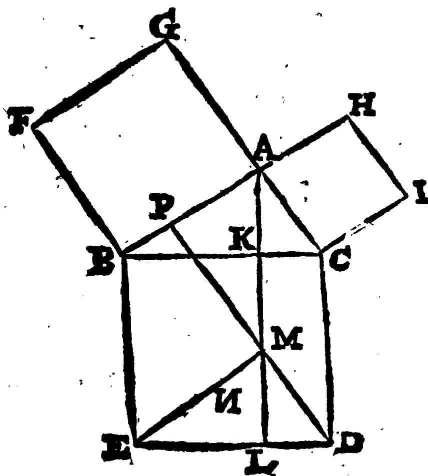
▱ DK ꝏ □ AI.

Similiter

▱ EK ꝏ [a] ▱ EA.

Atqui

□ AF ꝏ [b] eidem ▱ EA.

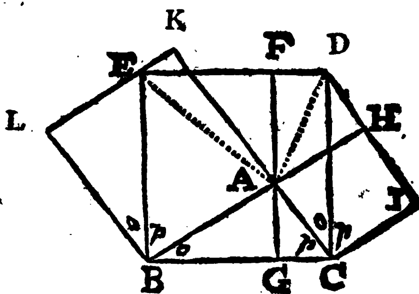


Ergo per Ax: I.

▭ EK ∞ □ AF.
Supra erat } A.
▭ DK ∞ □ AI

▭ EK + ▭ DK. ∞ □ AF + □ AI
hoc est □ BD.

DEMONSTRATIO III.



Factis faciendis, quæ apposita Figura monstrat.

▭ FDCG duplum est trian-guli ACD.
Atqui □ AHIC etiam est du-plum trianguli ACD. } 41. I.

Ergo ▭ FDCG ∞ □ AHIC.

Eodem modo.

▭ FEBG duplum est triang. AEB.
Atqui □ ABLK etiam est duplum trianguli AEB. } 41. I.

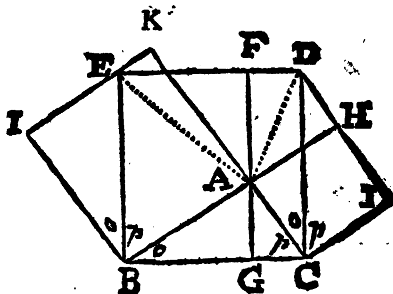
Ergo

Ergo □ FEBG ꝏ □ ABLK. } Adde.
Supra est □ FDCG ꝏ □ AHIC. }

Eritque □ EDCB ꝏ □ ABKL + □ AHIC. Q. E. D.

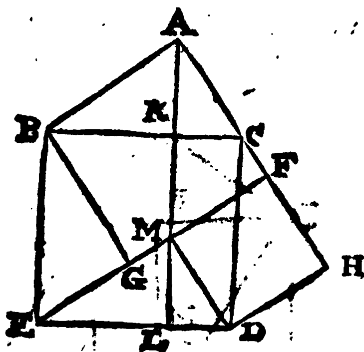
Nam quod latus BE occurrat lateri LK & latus ED continuato lateri IH sic patet, siquidem omnes anguli O, ut & P manifesto æquales sunt, quia ubique O + P constituunt unum rectum.

Adeoque triangulum ABC revolutum circa centrum B congruet cum triangulo BLE; revolutum autem circa centrum C, congruet cum triangulo CID.



DE-

DEMONSTRATIO IV.



BD est □ hypothenusæ BC.
BF □ lateris AB.
DF □ lateris AC. seu MD.

▭ EK ꝏ a ▭ EA.
□ BF ꝏ a eidem ▭ EA.
Ergo per Ax. I.
▭ EK ꝏ □ BF.
Deinde.
▭ DK ꝏ a ▭ DA.
□ DF ꝏ a eidem ▭ DA. a 35. I.

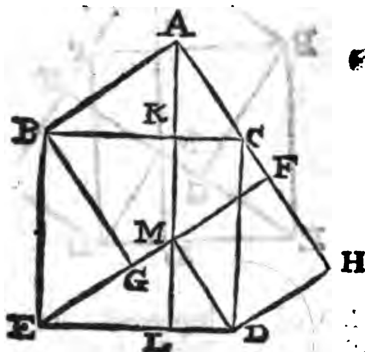
Ergo per Ax. I.
▭ DK ꝏ □ DF.
Supra erat. } A.
▭ EK ꝏ □ BF.

▭ EK

▭EK + ▭DK ∞ □BF + □DF.

Hoc est □ BD.

Vel hoc modo ad eandem Figuram.



De duobus Quadratis BF & DF extra Quadratum BD nihil eminet præter duo Triangula ABC. HCD.

Facile autem videre est quod sit.

Triang: ABC ∞ MED.

HCD ∞ GBE.

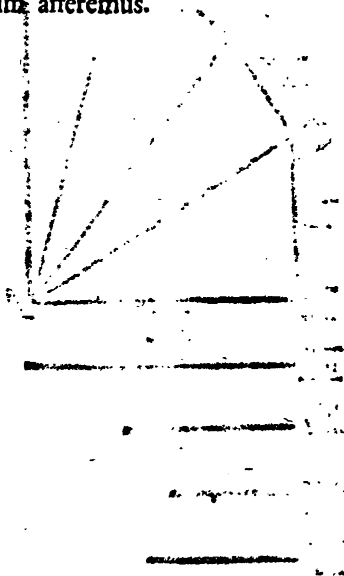
Adeoque □ BD continet duo □ta BF. DF.

Ergo illis est æquale.

SCHO.

SCHOLIUM I.

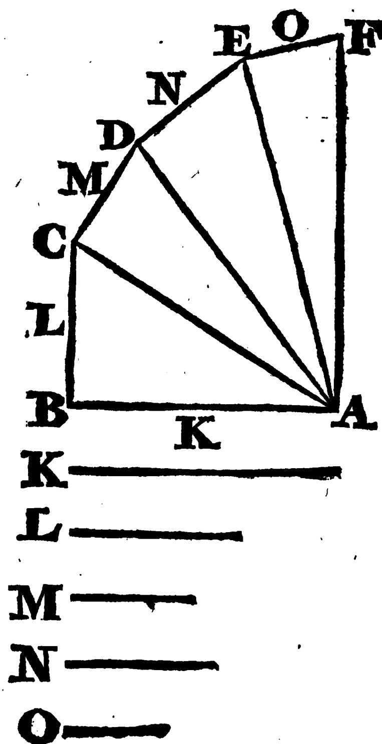
Pulcherrimum hoc Pythagoræ inventum insigne per totam Mathesin est Theorema, & non pauca utilissima suppeditat Problemata, quorum cum alia apud Clavium & alios Autores abundanti satis copia videri possint, nos tria tantum afferemus.



PRO-

PROBLEMA I.

Datis quotlibet lineis K. L. M. N. O. invenire Quadratum quod omnium linearum quadratis simul sumtis sit æquale.



Con-

Constructio & Demonstratio.

1. Duas lineas K & L, junge in angulo recto ABC, erit ductâ rectâ AC: □ AC ꝏ □tis K, & L.

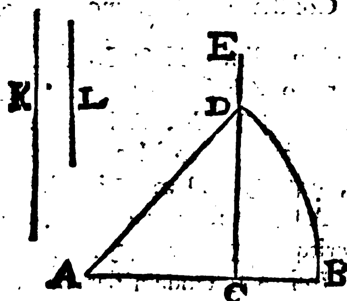
2. Factâ CD ꝏ M perpendiculari ad CA, erit □ AD ꝏ □tis. K. L. M.

3. Ad AD fiat perpendicularis DE ꝏ N, eritque □ AE ꝏ □tis K. L. M. N.

4. Ipsi AE tandem fiat perpendicularis EF ꝏ O, eritque □ AF ꝏ □tis. K. L. M. N. O.

Quæ omnia sequuntur ex hac prop. 47. cum quatuor ista triangula ABC. ACD. ADE. AEF. per constructionem sint rectangula.

PROBLEMA II.



Datis duabus lineis inæqualibus K. L. invenire quadratum, quo a se invicem quadrata ab illis facta differunt.

CONSTRUCTIO.

1. Facta linea A B æquali majori K, in ea sumatur A C æqualis minori L.

a 11. 1. b Post. 3.

2. Ex C [a] erecta infinita perpendiculari C E, Centro A [b] radio A B, describatur arcus circuli B D.

Dico Quadratum lineæ C D esse differentiam Quadratorum K & L.

DEMONSTRATIO.

Ducta recta A D, erit triangulum A C D per

per constructionem rectangulum; adeoque per 47. I.

□ AD ꝏ □ AC + □ CD.

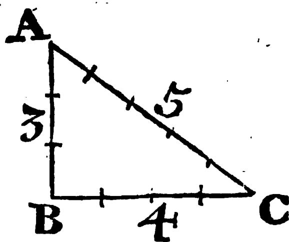
Atqui □ AD ꝏ □ K. } Per con-
Et □ AC ꝏ □ L. } struct.

Ergo □ K superat □ L, per □ CD. Adeoque □ CD est differentia quadratorum K & L. Q. E. D.

PROBLEMA III.

Cognitis trianguli rectanguli ABC duobus lateribus, invenire tertium.

PRAXIS.

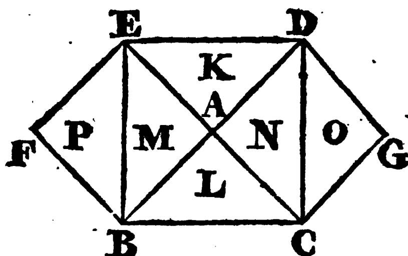


Sint cognita duo latera AB 3. BC 4. Quia triangulum eſt rectangulum: duo quadrata AB & BC: ſeu 9 & 16 addantur in unam ſummam: & obtinebitur 25. pro duobus □tis AB. BC. hoc eſt pro □to AC: cujus radix 5 dabit latus quæſitum AC.

Similiter cognita ſint latera AC 5. & BC 4: tum a □to AC 25. ſublato □to BC, 16, reſtabit pro □to AB 9. cujus radix 3. exhibebit latus quæſitum AB.

SCHO-

SCHOLIUM II.



Si triangulum rectangulum sit simul Isosceles, facillime propositionis veritas demonstrabitur hunc in modum.

PRÆPARATIO.

1. Super lateribus A B. A C. fiant □ta AF. AG.

2. Ducantur rectæ CD. DE. EB.

Dico B C D E esse □tum a BC, & æ □tis A F. A G.

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Per 32. I. illusque Coroll. 2. tres anguli ad B sc. A B C. A B E. E B F. ut & tres

 ad

ad C scil. A C B. ACD. DCG: præterea duo ad E sc: AEB. FEB, ut & ad D duo ADC. GDC; sunt semirecti: unde jam facile deducitur angulos A E D. A D E etiam esse semirectos: adeoque quatuor angulos quadrilateri BCDE esse rectos: quare latera opposita sunt parallela: sc: B C. E D & E B. D C.

Atqui B C ∞ C D (6. I.) quia triang. B C D est rectangulum in C & habet duos angulos supra Basin B D æquales: unde etiam B E ∞ E D.

Ergo quatuor latera B C. C D. D E. E B sunt æqualia: adeoque B C D E est □tum lateris B C.

PARS II.

Sex triangula K. L. M. N. O. P. habent suas bases inter se æquales, (quia sunt latera □ti) & duos angulos supra basin, quia omnes sunt semirecti.

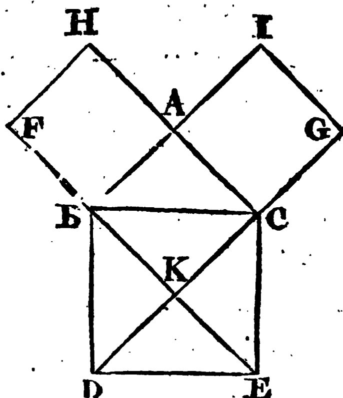
Ergo per 26. I. triangula omnia inter se sunt æqualia.

Adeoque 4 triangula K. M. L. N ∞ lia 4 triangulis. P. M. N. O.

Hoc est □tum. B C D E ∞ □tis A F. A G. Q. E. D.

Cui

Cui demonstrationi aliam sic breviter adjungimus.



Descriptis quadratis A F. A G. B E, producantur latera F B. G C. quæ necessario debere cadere in E & D facile probari potest, ut B E. C D sint Diametri, quæ ipsum quadratum & singulos illius angulos bifariam secant.

Unde jam nullo negotio deducitur lineas BK. CK. DK. EK esse inter se & lateribus A B. A C. æquales, adeoque trianguli DBC cum □to CI inter easdem parallelas I B. G D existentis, basis DC,

 dupla

dupla est parallelogrammi baseos CG: ergo per Scholium prop. 41. I. Triang. DBC ∞ □to AG.

Deinde triangulum DEC ∞ triang. DBC. 34. I.

Et Triang. DEC ∞ □to AG.
Et □tum AG ∞ □to AF.

Ergo Triang. DEC ∞ □to AF.

Quare sequitur duo Triangula DBC. DEC simul sumta, hoc est □tum BCDE esse æle quadratis duobus AF. AG simul sumtis.

Cæterum ex hac eadem demonstrationis forma, sequens haud inelegans dedumus

Theorema I.

In Triangulo Isoscele rectangulo ABC, quadratum Hypotenusæ BC quadruplum est trianguli ejusdem propositi ABC.

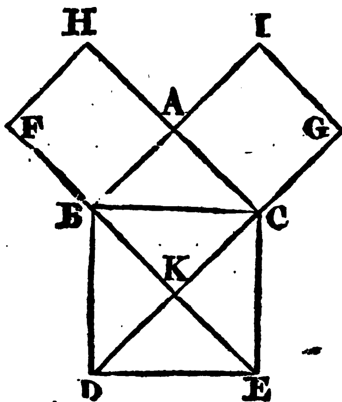
DEMONSTRATIO.

Ex superiori demonstratione patet singulos quadrati BE angulos bisectos esse, & lineas BK. CK. DK. EK lateribus AB. AC. æquales: Unde jam sequitur

tur quatuor triangula BKC. CKE. EKD. DKB. & inter se & triangulo B A E esse æquiangula, & æquilatera: adeoque æqualia.

Cum autem quatuor ista triangula constituant quadratum BCDE, patet illud quadruplum esse Trianguli A B C.

Q. E. D.



Quæ demonstratio præcedentis Theorematis, cum mihi occasionem præberet inquireudi, quomodo quadratum hypotenusæ trianguli rectanguli inæqualium la-

 terum

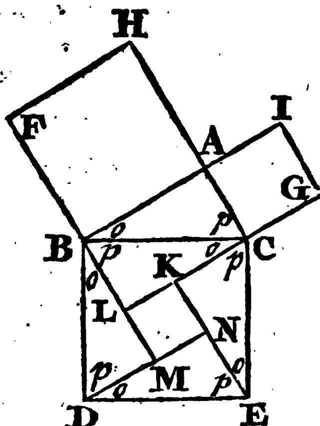
terum se haberet ad ipsum Triangulum sequens sese statim prodebat.

Theorema II.

In quolibetcunque Triangulo Rectangulo inaequalium laterum; quadratum Hypotenusae triangulum propositum quater sumtum superat quadrato quod fit a differentia reliquorum laterum: seu quod idem est; quadratum Hypotenusae est aequale triangulo proposito quater sumpto una cum quadrato differentiae reliquorum laterum.

Demonstrationem vide pagina sequente.

DEMONSTRATIO.



Super trianguli rectanguli A B C lateribus construantur quadrata A F. AG. B E.

Deinde producantur latera F B. G C: tum ex angulis E & D ducantur E K parallela F B, & D N parallela G C: istæ lineæ ita se intersecabunt, ut constituant quatuor triangula BLC. CKE. E N D DMB, & in illorum medio quadratum K L M N.

Quibus constructis vel leviter in præcedentibus exercitatus facile omnes an-

gulos

gulos Q, ut & omnes P inter se æquales esse perspiciet.

Unde sequitur per 26. I. quinque ista Triangula esse inter se æqualia, & habere latera æqualia lateribus: sc. AB. BM. DN. EK. CL. ut etiam AC. CK. EN. DM. BL.

Quare si auferatur BL a BM: DM a DN: EN ab EK: & CK a CL, remanebunt KL. LM. MN. NK inter se æquales, quæ sunt differentiæ laterum AB. AC.

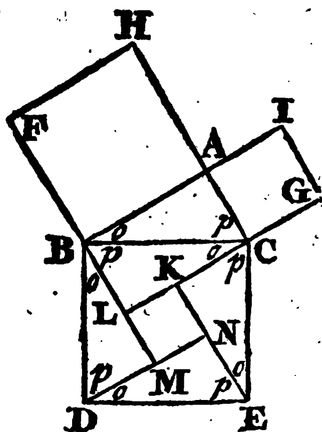
Quia autem istæ æquales lineæ ad angulos rectos sunt junctæ, ut facile ex 26. I. patet, sequitur quadrilaterum KLMN esse quadratum differentiæ laterum AB. AC.

Cum ergo quatuor triangula BMD. DNE. EKC. CLB. cum quadrato KLMN constituant totum □tum BCDE; quod fit ab hypotenusa BC: patebit abunde propositi nostri Theorematis veritas.

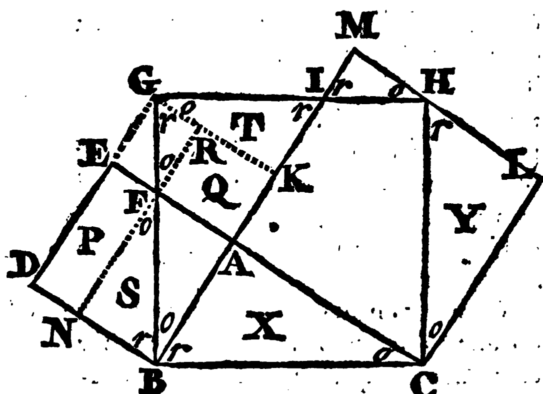
Vix autem possum quin hic afferam plus quam elegantem Clarissimi Christophori Sturmii demonstrationem præsentis prop. 47, quam ex hac figura, alio ac diverso a nobis ex fundamento, constructâ, nobis suppeditat, in calculo Alegebraico propositam: quæ tamen ab iis, qui vel a limine Analysin speciosam salutâverunt, intelligi potest. Illa

Illa autem ita se habet. Trianguli Rectanguli A B C, latus B C seu hypotenusa dicatur *a*: A C vocetur *b*. A B *c*. Area Trianguli A B C erit $\frac{1}{2}$ *bc*, adeoque quatuor triangula facient 2 *bc*: Deinde differentia laterum A B. A C erit *c-b*, ejusque quadratum *cc-2bc* ✠ *bb*: quod priori areæ quatuor triangulorum additum facit *cc* ✠ *bb*, quæ summa est æqualis quadrato *aa* facto ab hypotenusa.

Cum autem ista summa exhibeat duo quadrata laterum A B. A C. sequitur etiam duo illa quadrata esse æqualia quadrato BC.



Cæte-



Cæterum illuſtris hujus propoſitionis aliam à præcedente generalem demonſtrationem hoc modo damus.

Triangulum rectangulum datum ſit ABC; laterum AB. AC. quadrata ſint AD. AL: & lateris BC quadratum BH: Jam patet ad oculum quadratum BH a reliquis quadratis AD, AL, abſcindere triangulum AFB & trapezium AIHC. Si jam, producta DE in G, & ducta NR per F parallela BM & GK parallela EA, demonſtratur eſſe triangulum X ∞ Y.

S ∞ T.

Parallelogr. P ∞ Q.

Triangulum GFR ∞ IHM.

Certi

Certi esse poterimus de propositionis veritate.

DEMONSTRATIO.

Generaliter notandum facile posse ex præcedentibus demonstrari omnes angulos O, ut & omnes R esse inter se æquales.

Primum X ∞ Y.

Duo triangula X & Y habent duos angulos O, & R ut & latera BC. CH æqualia: Ergo (26. I.) ipsa triangula sunt æqualia.

Secundum S ∞ T.

Duo triangula S & T, habent duos angulos O & R, & ut & latera NF. GK æqualia: Ergo (26. I.) ipsa triangula sunt æqualia. Et latus BF ∞ GI. quibus ab æqualibus BG, GH ablatis, remanet FG ∞ IH.

Tertium P ∞ Q.

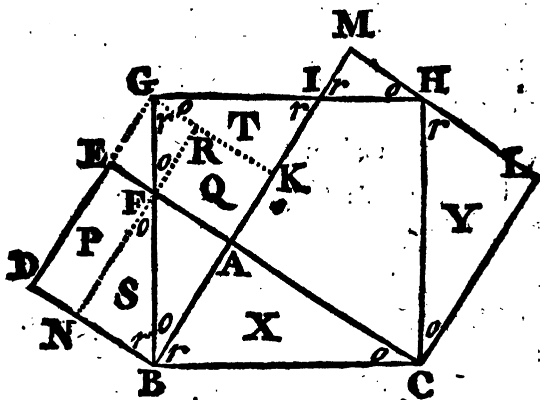
Quia sunt complementa parallelogrammi DK. (43. I.)

Quartum Triang. GFR ∞ IHM.

Duo triangula GFR & IHM, habent duos

duos angulos O & R. ut & latera FG. IH æqualia. Ergo (26. I.) ipsa triangula sunt inter se æqualia.

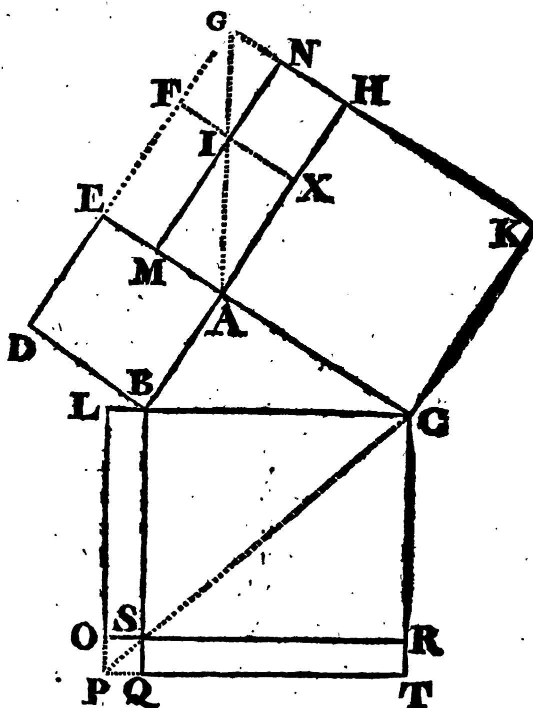
Ex quibus patet lateris BC quadratum BH in se comprehendere duorum reliquorum laterum AB. AC quadrata AD. AI. Ergo quadratum BH etiam per Axioma 13. duobus quadratis AD. AI. æquale est. Q. D. E.



Quod autem BG concurrat cum DE in puncto G, & CH cum ML in H, supra demonstratum est.

Alia

Alia DEMONSTRATIO.



Trianguli rectanguli A B C, laterum quadrata ſint A D. AK. B T. demonſtrandum eſt hoc tertium B T eſſe æqle duobus reliquis.

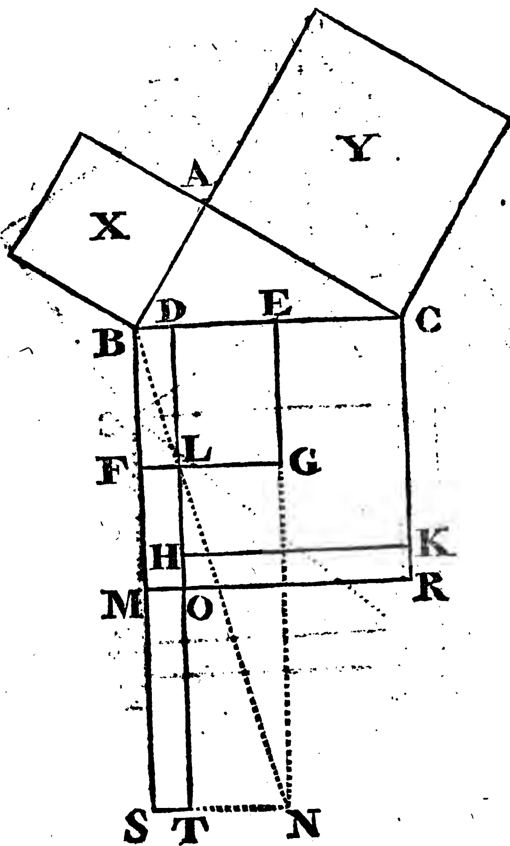
M Fiat

Fiat A X ∞ A E, erit super A X factum quadratum A F ∞ A D. Producatur K H in G ut sit H G ∞ X F. Ducatur G A. & per I ducatur M I N parallela A H & tandem agatur E G. Eritque H E parallelogrammum, cujus complementa E I. I H. sunt æqualia: si utrimque addatur commune parallelogrammum M X. erit quadratum A F hoc est A D ∞ parallelogr. M H:

Ergo totum parallelogr. M K est æquale duobus quadratis A D. A K.

Deinde sumatur C L ∞ C M, & C R ∞ C K. & perfecto parallel. L R (quod erit ∞ ipsi M K) producantur L O & T Q ut sibi occurrant in P, tum ducatur Diagonalis C S, quæ productâ cadet in P. (ut mox demonstrabitur.) Hisce factis in parallelogr. L T. duo complementa L S. S T erunt (43. I.) inter se æqualia: quibus si addatur commune parallelogr. B R, erit parallelogr. L R (hoc est duo Quadrata A D. A K) ∞ quadrato B T.

Ulti-


A
Y
X
D
E
C
B
L
G
F
K
H
R
M
O
S
T
N

Ultima Demonſtratio.

Intra lateris BC quadratum BR, ſit quadratum CH ∞ lateris AC quadrato Y: Quo a quadrato BR ſublato remanebunt duo parallelogramma BO. OK. ſeu facto parallelogr. OS ∞ OK, remanebit totum parallelogrammum BT, Quod ſi demonſtratur eſſe ∞ quadrato X, peracta res erit.

Quare ſumta BE ∞ BA, conſtruatur quadratum BG ∞ quadrato X. Tum productis lateribus EG. ST, ut concurrant in N; ex B per L ducatur BLN; quæ etiam cadet in idem punctum N.

Tum in parallelogrammo BN complementa EL. LS erunt æqualia & ſi ab utraque parte addas commune BL. erit parallelogr. BT (hoc eſt BO + OK) ∞ quadrato BG ſeu X.

Unde jam patet duo quadrata X & Y eſſe æqualia quadrato BR.

Q. D. E.

Quod autem Diameter BL producta cadat in punctum N, ubi latera EG, ST producta concurrunt, sic probatur.

B D L
o
F L G
p
X
q
S T N
t
Y

Si

Sit non cadat in N, tum juxta adversarium cadat.

Vel supra N in X, ut BX sit linea recta.

Vel infra N in Y, ut BY sit recta.

In X supra N.

Angulus O ∞ Q. } 29. I.
Angulus O ∞ P. }

Ergo P ∞ Q externus interno contra Schol: 13. I.

Quæ demonstratio obtinet in omnibus punctis supra N sitis.

In Y infra N.

Angulus O ∞ Q. } 29. I.
Angulus O ∞ T. }

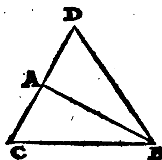
Ergo Q ∞ T. iterum externus interno contra idem Scholium.

Eademque demonstratio locum habet in omnibus punctis infra N posisis.

Ergo cum linea BL producta non possit cadere supra nec eriam infra N necessario cadet in ipsum punctum N.

PROPOSITIO XLVIII.

Theor. 84. *Si quadratum ab uno Trianguli latere CB descriptum sit æquale duobus reliquorum laterum CA. AB quadratis: angulus CAB, quem reliqua ista latera continent, rectus erit.*



DEMONSTRATIO.

a 11. 1. Ex A ipsi AB [a] excitetur perpendicularis AD ꝏ AC. & ducatur recta DB

Tum in Triangulo DAB erit.

Quadr. DA (hoc est AC) + quadr.
b 47. 1. AB [b] ꝏ quadr. DB.

Atqui quadr. AC + quadr. AB etiam est ꝏ quadr. CB. per Prop.

Ergo

Ergo [c] quadr. D B ꝏ quadr. C B. c Ax. I.
Adeoque latus D B ꝏ lateri C B.

Quare in Triangulis A D B ; A C B.
Latus A D ꝏ A C per constructionem.
Latus D B ꝏ C B.
Latus A B commune. d 8. I.

Ergo [d] etiam omnes anguli sunt ; æquales adeoque
Ang. D A B ꝏ C A B.
Atqui D A B est rectus.

Ergo C A B etiam rectus erit.
Q. D. E.

FINIS LIBRI PRIMI.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SECUNDUS.

In primo libro instituta triangulorum tum quoad angulos tum quoad latera varia comparatione, & parallelogrammorum non una & inter se & cum triangulis collatione, in hoc libro secundo aggreditur Euclides linearum ad libitum sectarum parallelogramma Rectangula & Quadrata; docendo quomodo se habeant Parallelogramma rectangula quæ fiunt a partibus alicujus lineæ tum inter se tum relata ad Quadrata totius lineæ: sicut ex ipsis propositionibus porro manifestum evadet.

Cum autem hujus libri propositiones, licet numero non adeo multæ, tales sint, ut sua difficultate tyronum progessui haud exiguam sæpe injiciant moram, nos oleum

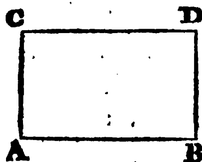
oleum & operam non perdidiſſe exiſtimabimus, ſi illarum demonſtrationes ita ordinemus, ut quilibet illas attento perlegens ſtudio, illiſque primum librum bene perceptum rite applicans, maximam difficultatum penitus diſparere comperiat partem.

Cæterum ne occurrentes ignotæ voces demonſtrationum interrumpant curſum, hic ut & in primo libro factum eſt, Definitiones præmittuntur terminorum adhibendorum tollentes dubiam ſignificationem.

DEFINITIONES.

I.

Parallelogrammum rectangulum ABCD contineri dicitur sub duabus rectis CA. AB, rectum angulum A comprehendentibus.



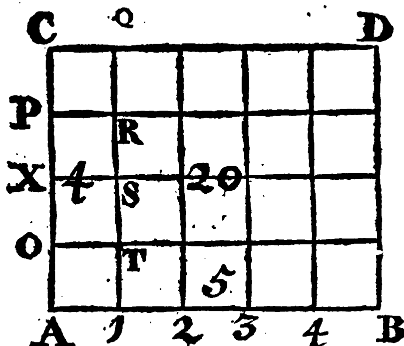
Antea vidimus generationem alicujus superficiei, quæ in memoriam revocata parallelogrammi rectanguli formationem intellectu reddet faciliorem.

Rectæ lineæ AB perpendiculariter insistat linea CA, quæ concipiatur ferri supra lineam AB, ut ipsi semper maneat perpendicularis; cum ista linea CA pervenerit ad punctum B: tum extremum punctum C descriptam relinquet lineam CD æqualem ipsi AB; & cum linea BD sit quasi eadem cum linea AC ex puncto

A

A delata in punctum B, erit linea B D etiam æqualis ipsi A C.

Unde patet ad inveniendam totam quantitatem seu aream alicujus parallelogrammi requiri tantum notam longitudinem duorum laterum angulum rectum continentium.



Quod ut adhuc clarius evadat, sicut & arctissimam inter linearum in se invicem ductum & numerorum multiplicationem esse affinitatem, ponamus lineam C A divisam esse in quatuor partes æquales C P. P X, X O. O A. similiter lineam

A B

AB in quinque partes, quæ prioribus æquales sint. Si jam linea C A super A B mota pervenerit ad locum 1 Q punctum C. descriptam exhibebit lineam C Q. punctum P, lineam PR: X, lineam XS. O, lineam OT; adeoque unico isto motu facta erunt quatuor ista minora quadrata CR. PS. XT. O 1, quot nim. linea C A partes habet: si enim ex pluribns constaret partibus, etiam plura constituta essent quadrata.

Facile autem intelligimus illud idem esse ac si numerus 4 ducatur seu multiplicetur per 1 seu unitatem.

Similiter si linea Q 1 (quæ eadem jam concipienda est cum A C) secundo moto pervenerit ad punctum 2, eodem modo quatuor alia quadrata efficientur quæ prioribus addita simul 8 dabunt: id quod iterum idem est, ac si numerus 4 bis multiplicetur per 1 seu semel per 2.

Non aliter si linea A C perget moveri, tertius motus quatuor alia prioribus adjiciet quadrata; quatuor alia quartus; donec tandem quintus ultima quatuor adjungendo quadrata totum parallelogrammum rectangulum perficiat & compleat: quæ omnia quadrata sibi invicem addita, 20 exhibebunt; quod rursus idem est ac si nume-

numerus 4 quinquies per unitatem ſeu ſemel per 5 multiplicatus eſſet; quæ operatio ſimiliter eundem producit numerum 20.

Cæterum notandum eſt in ſequentibus ad multiplicandum lineam A B per lineam C D, ſeu ad ducendam lineam A B in lineam C D: vel tandem ad deſignandum rectangulum comprehenſum ſub lateribus A B, C D me ſemper ſcripturum ▭ A B. C D.

Unde jam exiſtimo manifeſtam ſatis eſſe rationem ob quam ad inveniendam alicujus ſeu omnium parallelogrammorum rectangulorum aream ſolummodo duorum laterum rectum angulum comprehendentium requiratur notitia.

Hinc porro apparet, quomodo cognita area parallelogrammi rectanguli, & alterutro laterum alterum inveniri poſſit latus; dividendo ſcilicet datam aream per latus cognitum: id quod in parallelogrammo A B C D clare patet, quod 20 quadrata continet; qui numerus ſi dividatur per 4 ſeu cognitum latus C A. acquiremus 5 pro latere A B. & viciſſim ſi 20 dividatur per 5 ſeu latus notum A B, invenietur 4 pro altero latere A C.

NO-

NOTA.

Primo. Parallelogrammum dicitur rectangulum quod habet unum angulum rectum. Nam si unus est rectus, [a] erunt & reliqui recti.

a 29. & 34. I.

Secundo. Parallelogrammum est vel oblongum vel quadratum.

Oblongum est quod latera contigua habet inæqualia, sive quod continetur sub duabus rectis inæqualibus; illud autem nos in sequentibus semper exprimemus hoc signo ▭; adeoque ex: gr: ▭ A C, semper significabit parallelogrammum rectangulum A C.

Quadratum est, quod sub duabus rectis æqualibus continetur: illud etiam exprimemus tali signo □ ut □ C D, semper denotet Quadratum C D.

Tertio. In sequentibus nomine rectanguli Euclides semper intelligit parallelogrammum rectangulum.

Quarto. Geometræ omne parallelogrammum exprimunt, duas tantum nominando literas per diametrum oppositas: ut ad designandum parallelogrammum appositum adhibent literas A D, vel B C.

II. Omnis

II.

Omnis parallelogrammi spatii unum quodlibet eorum quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocatur.

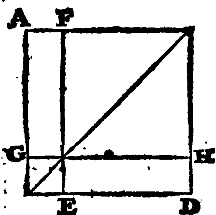
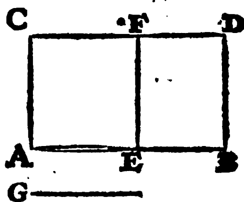


Figura FGEH, composita ex duobus complementis FG. EH &, quod circa diametrum est, parallelogrammo GE, dicitur Gnomon seu norma; ad imitationem illius instrumenti quo fabri utuntur, ad examinandum, utrum ex. gr. duo parietes, vel duo asseres ad angulum rectum conjuncti sint nec ne.

PROPOSITIO I.

Theor. 1. *Si fuerint duæ rectæ G & AB, quarum altera secta sit in quotcunque partes AE. EB altera vero insecta; erit rectangulum sub illis duabus G & A B comprehensum æquale rectangulis, quæ sub insecta G, & sub singulis segmentis A E. E B continentur.*



DEMONSTRATIO.

Ex punctis A & B erige duas perpendiculares A C, B D æquales datæ G: & juncta C D, ex E duc rectam E F parallelam A C vel B D. Tum lineæ C A, F E
a 34. 1. inter [a] se æquales erunt & soles datæ G.

Jam

Jam ▭ A F continetur ſub C A hoc eſt G & ſegmento A E.

Et ▭ E D continetur ſub F E hoc eſt G & ſegmento E D.

Duo autem ▭la A F, E D ſimul ſunt b Ax. 16.
b ꝏlia toti ▭lo A D quod continetur ſub data G & tota A B.

Ergo patet veritas propoſitionis.

Sub calculi formula breviter ſic demonſtratur

AB ꝏ AE ✠ EB ⎤
G   G   G ⎦ M

c Ax. 6.

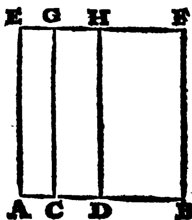
---

c ▭ G, AB ꝏ ▭ G, AE ✠ ▭ G, EB.   Q. D. E.

Sit A B. 10.	Vel in Numeris
A E. 7.	10 ꝏ 7 ✠ 3 ⎤ M
E C. 3.	4 4 4 ⎦
G. 4.	40 ꝏ 28 ✠ 12. ꝏ 40.

PROPOSITIO II.

Theor. 2. *Si recta A B secta sit utcunque in C & D tria rectangula sub tota A B, & singulis segmentis A C. C D. D B comprehensa æqualia sunt quadrato quod fit a tota A B.*



DEMONSTRATIO.

Super A B fiat quadratum B E, ducantur C G. D A parallelæ A E: quæ sunt
a 34. I. æquales a A E. hoc est A B.

▭ E C fit ab E A hoc est A B & parte A C.

▭ G D fit ab G C hoc est A B & parte C D.

▭ H B fit ex H D hoc est A B & parte D B.

Cum

Cum autem tria ▭la EC. GD HB, ſimul ſumta conſtituant □tum EB, patet illa etiam ipſi eſſe æqualia. b b Ax. 13.

Sub calculo.

$$\left.\begin{matrix} AB & ꝏ & AC & + & CD & + & DB \\ AB & & AB & & AB & & AB. \end{matrix}\right\} M$$

□ AB ꝏ ▭ AB. AC + ▭ AB. CD.
+ ▭ AB. DB.

Vel in numeris.

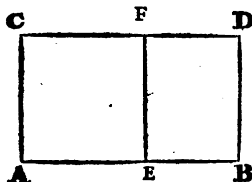
Sit AB 10. AC 2. CD 3. Ergo DB 5.

$$\left.\begin{matrix} 10 & ꝏ & 2 & + & 3 & + & 5 \\ 10 & & 10 & & 10 & & 10 \end{matrix}\right\} M$$

100 ꝏ 20 + 30 + 50 ꝏ 100.

PROPOSITIO III.

Theor. 3. *Sit recta A B secta utcunque in E, rectangulum sub tota A B & partium alterutra A E comprehensum, æquale est ejusdem partis A E quadrato, una cum rectangulo sub partibue AE. EB comprehenso.*



DEMONSTRATIO.

Ex A & B erige perpendiculares A C. B D æquales segmento A E: tum juncta C D ducatur E F parallela A C, quæ ipsi A C etiam [a] erit æqualis.

a 34. I.

CE

A { ▭ CE continetur sub CA hoc est AE & segmento AE, adeoque CE est quadratum factum ab AE.
▭ FB continetur sub FE hoc AE & segmento EB.

□ CE cum seu + ▭ FB est æquale ▭ CB, comprehenso sub CA hoc est segmento AE & tota linea AB.

Q. E. D.

Sub calculo.

AB ∞ AE + EB ⎤
AE   AE   AE ⎦ M

▭ AE. AB. ∞ □ AE + ▭ AE. EB.

Vel in numeris.

Sit AB. 10. AE. 6. Ergo EB. 4.

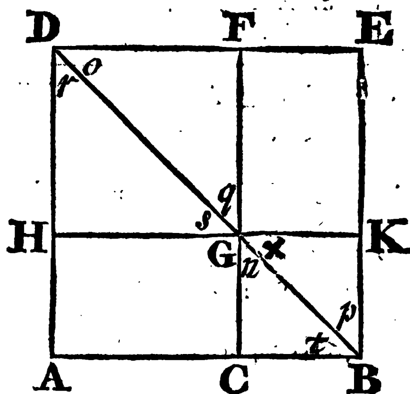
10 ∞ 6 + 4 ⎤
6   6   6 ⎦ M

---

60 ∞ 36 + 24 ∞ 60.

PROPOSITIO IV.

Theor. 4. *Si recta linea A B utcunque secta sit in C. Quadratum totius A B erit æquale quadratis segmentorum A C. C B, una cum bis sumto rectangulo sub segmentis A C. C B comprehenso.*



DEMONSTRATIO.

a 46. 1. Super A B fiat a □ B D, & ducta Diametro B D, sumatur B K ∞ B C; tum ducan-

ducantur CF, KH parallelæ lateribus B E. B A.

Tum in parallelogrammo HF erit DF ꝏ HG ꝏ [b] AC:& HD [b] ꝏ GF etiam ꝏ AC: ut & [c] omnes anguli recti: Ergo H F est □ Segmenti A B. b 34. 1. c 29. 1. & 34. 1.

Simili modo in parallelogrammo C K erit CB [b] ꝏ GK. Et CG ꝏ BK ꝏ CB: ut & omnes anguli recti. [c] Ergo CK est □ segmenti CB.

Deinde ▭ FK continetur sub FG ꝏ AC: & GK ꝏ CB.

Ut & ▭ A G continetur sub uno segmento A C & sub C G ꝏ C B.

Quæ duo ▭la si ad duo reliqua □ta addantur, exhibebunt simul totum □ quod fit ab A B; adeoque ipsi æqualia erunt.

Per calculum hoc modo demonstratur.

AB ꝏ AC ✠ CB }
AB ꝏ AC ✠ CB } M.

□ AC ✠ ▭ AC. CB.
✠ ▭ AC. CB ✠ □ CB.

□ AB ꝏ □ AC ✠ 2 ▭ AC. CB
✠ □ CB.

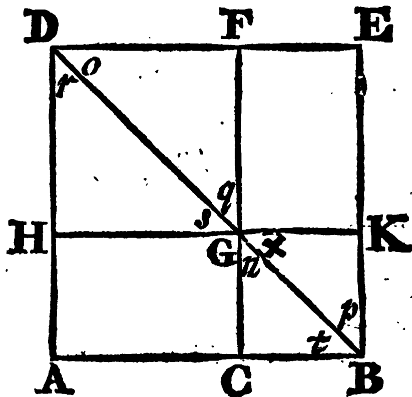
 Seu

Seu in numeris.

AB ∞ 10.
AC ∞ 6.
Ergo CB ∞ 4.

AC	6	4	CB
AC	6	4	CB
	36	16	

AB	10
AB	10
	100
6	AC
4	CB
24	
2	
48	
36	
16	
100	



CO-

COROLLARIUM I.

Parallelogramma circa diametrum quadrati sunt quadrata.

DEMONSTRATIO.

Hoc patet ex demonstratione præcedente: Probatum enim est parallelogramma H F, & C K circa Diametrum D B constituta habere omnes angulos rectos & latera æqualia, adeoque illa esse quadrata. Cum jam idem in talibus omnium quadratorum obtineat parallelogrammis, sequitur illa esse quadrata.

COROLLARIUM II.

Si recta linea bifariam secetur quadratum totius lineæ quadruplum est quadrati a dimidia facti.

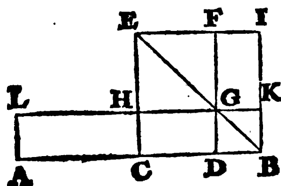
DEMONSTRATIO.

Si enim sit A C ∞ C B, erit quoque BK ∞ B C, adeoque C K Quadratum dimidiæ A B: Similiter A C ∞ C G, ergo A G erit quadratum dimidiæ A B: Nec non H D ∞ D F ∞ dimidiæ A B: Ut & denique F E ∞ E K ∞ dimidiæ A B: quare Quadratum totius A B continebit. 4. quadrata facta a dimidia A B.

PRO-

PROPOSITIO V.

Theor. 5. *Si recta linea A B secetur in æqualia in C, & non æqualia in D: rectangulum A G sub inæqualibus segmentis A D. D B comprehensum, una cum quadrato H F ab intermedia sectione C D, æquale est quadrato C I, quod a dimidia C B describitur.*



PRÆPARATIO.

a 46: I. 1. Super dimidia C B fiat [a] quadratum C I, ducaturque diameter.

b 31. I. 2. Ex D ducatur D F lateri B I [b] parallela.

3. Sumta B K ∞ B D, ducatur K L [b] parallela A B, ut & A L parallela B K.

DE-

DEMONSTRATIO.

▭ AH continetur ſub AC & CH ∞ DB: Ut & ▭ BF continetur ſub BI ∞ AC & DB: Ergo

▭ AH ∞ ▭ BF } A.
▭ CF ∞ ▭ CF }

▭ AH + ▭ CF ∞ ▭ BF + ▭ CF.
hoc eſt. hoc eſt.
▭ AG + □ HF ∞ □ CI.

In numeris.

Sit tota AB 10. Ergo dimidia AC, CB 5. AD 8. Ergo DB 2. Et CD 3.

CB 5 } M.
CB 5 }

□ CB 25

M. { AD 8
M. { DB 2

▭ AD. DB. 16.

Tum.

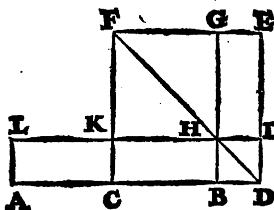
CD 3. } M.
CD 3. }

□ CD 9. } A
▭ AD. DB 16. }

▭ ADB. + □ CD 25. ut ante.

PROPOSITIO VI.

Theor. 6. *Si recta AB sit bifariam secta in C, eique recta quædam BD adjiciatur; Erit rectangulum sub tota composita AD & adjecta BD contentum una cum quadrato dimidiæ CB, æquale quadrato ipsius CD compositæ ex dimidia & adjecta.*



PRÆPARATIO.

1. Super CD fiat □ CE.

2. Ducta Diametro FD, ex B agatur BG parallela DE.

3. Sumpta DI ∞ DB, ducatur IL parallela DA, ut & AL parallela DI.

DE.

DEMONSTRATIO.

▭ AK continetur sub AC & CK ꝏ DI ꝏ DB; Et ▭ HE continetur HG ꝏ AC, & GE ꝏ BD: Ergo

▭ AK ꝏ ▭ HE
▭ CI + □ KG ꝏ ▭ CI + □ KG } A.

▭ AK + ▭ CI + □ KG. ꝏ ▭ CI + ▭ HE + □ KG.

hoc est

▭ AI + □ KG ꝏ □ CE.

In numeris.

Sit linea AB 10. BD 2. Ergo tota AD. 12. Dimidia AB. seu AC. seu CB 5. Ergo CD 7.

AD 12.
BC 2. } M.

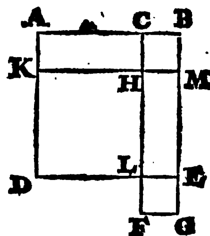
▭ AD.DB 24
□ CB. 25 } A.

▭ AD.DB + □ CB 49 ꝏ 49 □ CD.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Theor. 7. *Si recta AB utcunque secetur in C, erunt quadrata totius AB & utriusvis segmenti CB, aequalia bis sumto rectangulo contento sub tota AB & segmento dicto CB, una cum quadrato alterius segmenti AC.*



PRÆPARATIO.

a 46. I. 1. Super [a] A B fiat □ A E.

2. Sume B M ∞ B C, & ducantur CL

b 31. I. M K [b] parallelæ lateribus B E. B A. Erit-

c 34. I. que L E ∞ [c] C B.

3. Super L E fiat □ L G.

DE.

DEMONSTRATIO.

Duo □ta AE. EF ∞ d duobus ▭lis AM. MF cum quadrato KL. d Ax. 13.

Atqui ▭ AM continetur sub AB & BM hoc est BC.

▭ MF continetur sub MG (quæ facile probatur esse æqualis AB, cum sit ME ∞ AC & EG ∞ CB) & GF hoc est BC.

Ut & □ KL fit a KH hoc est AC altero segmento.

Ergo patet veritas propositionis.

In numeris.

Sit AB 10. □ AB 100 } A.
AC . 8. □ CB 4 }

Ergo CB 2. □ AB + □ CB 104.

AB 10 } M.
BC 2 }

▭ AB BC 20
2

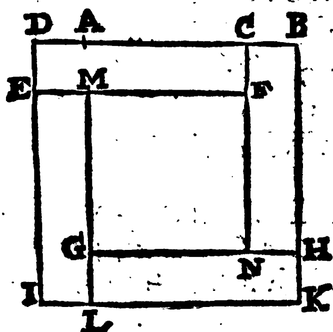
2 ▭ AB. BC. 40 } A.
□ AC 64 }

2 ▭ AB BC + □ AC 104.

ut ante.

PROPOSITIO VIII.

Theor. 8. *Si recta linea A B secetur utcunque in C, eique adjiciatur A D ∞ C B: Rectangulum quater comprehensum, sub data A B & alterutro segmento C B una cum quadrato alterius segmenti A C, erit æquale quadrato D K. quid fit a composita D B.*



PRÆPARATIO.

1. Factis D E. I L. KH ∞ DA ſ. CB

CB ducatur EF parallela DB, quæ ipsi CN parallelæ BK occurrat in F.

2. Deinde ex H agatur HG parallela KI, quæ ipsi LM parallelæ ID occurrat in G.

DEMONSTRATIO.

Quadratum totum DK continet 4. Rectangula DF. BN. KG. IM: quæ continentur sub DC. CF: BH. HN: KL. LG: IE. EM: hoc est quæ omnia comprehenduntur sub AB & CB: una cum Quadrato MN quod fit a latere MF hoc est altero segmento AC. Adeoque patet Quadratum totum esse æquale 4. istis Rectangulis, una cum quadrato alterius segmenti. Q. E. D.

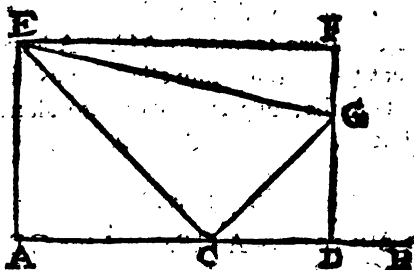
In numeris.

Sit AB 10. — AC 8. Ergo CB 2.

AC 10		DB 12	M.
CB 2		DB 12	
▭ AC. CB 20	M.	□ DB 144	
4		ut ante.	
4 ▭ AC CB 80	A.		
□ AC 64			
144.			

PROPOSITIO IX.

Theor. 9. *Si recta linea AB secetur in æqualia in C, & non æqualia in D; quadrata inæqualium segmentorum AD. DB. dupla sunt quadratorum AC. CD. quæ a dimidia AC & ab intermedia CD fiunt.*



PRÆPARATIO.

1. Ex A & D erectis perpendicularibus AE. DF ꝏ AC, ducatur EF: quæ erit ꝏ AD.

2. Facta DG ꝏ DC (unde fit GF ꝏ DB) ducantur EC. CG. EG.

Erunt

Eruntque E A C. G D C. E F G per constructionem Triangula rectangula.

Uti etiam E C G; Cum enim 3. anguli ad C simul (per 13. I.) sint æquales duobus rectis, si ab illis auferantur, duo anguli E C A. G C D, (qui singuli per Schol: 13. I.) sunt semirecti, remanebit angulus E C G ∞ uni Recto.

DEMONSTRATIO.

1. Quia in Triangulis rectangulis EAC. GDC, est EA ∞ AC & GD ∞ DC, erit.

□ E C duplum [a] □ti A C] A — a 47. I.
□ G C duplum [a] □ti C D]

Duo □ta EC. G C dupla □torum A C. CD.

2. Atqui in Triangulo rectangulo E C G.

□ E G ∞ [a] □tis E C. G C.

Ergo □ E G duplum □torum A C. CD

3. Denique in Triangulo rectangulo E F G.

□ E G ∞ □tis E F. F G.

Ergo □ta E F. F G.

 hoc

hoc est

□ta AD. DB dupla □torum AC. CD. Q. E. D.

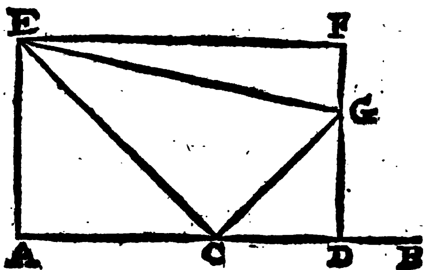
In numeris.

Sit AB 10. Ergo AC. CB 5.
AD 7. Ergo DB 3.
Et CD 2.

□ AD 49 ⎤ A. □ AC 25 ⎤ A.
□ DB 9 ⎦ □ CD 4 ⎦

□ta AD. DB 58. □ta AC. CD 29 ⎤ M.
2 ⎦

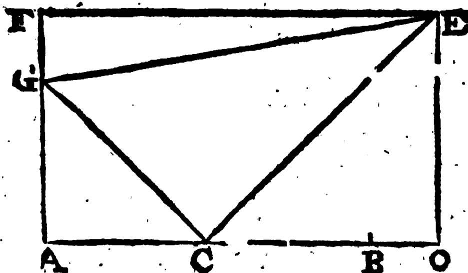
bis □ta AC. CD 58.



PRO-

PROPOSITIO X.

Si recta AB secta sit bifariam in C, eique adjiciatur BO; Quadrata totius compositæ AO & adjectæ BO erunt dupla quadratorum AC. CO, quæ a dimidio AC fiunt, & a CO composita ex dimidia & adjecta. Theor. 10.



PRÆPARATIO.

1. Ex A & O erectis perpeudicularibus AF. OE ∞ CO ducatur FE quæ erit ∞ AO.

2. Tum facta AG ∞ AC seu CB,

(unde fit FG ꝏ BO) ducantur GC. CE. EG.

Eruntque GAC. EOC. GCE. EFG triangula rectangula, ut in præcedenti demonstratione.

DEMONSTRATIO.

1. Quia in Triangulis rectangulis GAC. EOC est GA ꝏ AC: & EO ꝏ OC. Erit

a 47. 1. □ GC duplum [a] □ti AC }
□ CE duplum [a] □ti CO } A.

□ta GC. CE dupla □torum AC. CO.

2. Atqui in Triangulo rectangulo GCE.

□ GE ꝏ [a] □tis GC. CE.

Ergo □ GE duplum □torum AC. CO.

3. Denique in Triangulo rectangulo EFG.

□ GE ꝏ [a] □tis EF. FG.

Ergo □ta EF. FG.
hoc est,
□ta AO. BO dupla □torum AC. CO.

Q. E. D.

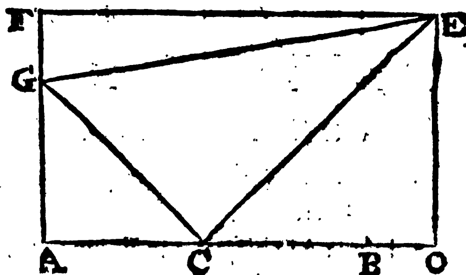
Vel

Vel in numeris.

Sit AB ∞ 10. Ergo AC. CB 5.
Sit BO ∞ 2. Ergo AO ∞ 12.
Et CO ∞ 7.

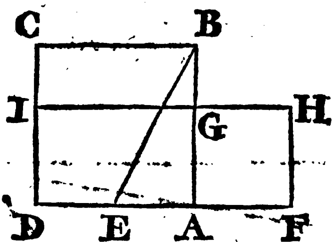
□ AO 144	A.	□ AC 25	M.
□ OB 4		□ CO 49	
□ta OA. OG 148		□ta AC.CO 74 2	M.

Bis □ta AC. CO 148



PROPOSITIO XI.

Probl. 1. *Datam rectam AB ita secare in G, ut rectangulum comprehensum sub tota linea AB & uno segmentorum BG sit æquale alterius segmenti AG quadrato.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur AD perpendicularis & æqualis ipsi AB.
2. Divisa AD bifariam in E, junge EB.
3. Sumatur EF. EB.
4. Fac AG ∞ AF. Et dico factum esse quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

Super data AB compleatur □ AC ut &

& supra AG □ AH & Recta HG producâtur in I.

▭ DF. FH (hoc est FA) + □ EA ꝏ [a] □ EF. hoc est □ EB. a 6. 2.

Atqui □ EB ꝏ □ AB. seu □ AC b 47. 1.
+ □ EA.

Ergo ▭ DF. FH + □ EA ꝏ □ EA + □ AC.

Et ablato utrimque □to EA.

▭ DF. FH [c] ꝏ □ AC	S.	c Ax. 3.
▭ DG ▭ DG		

□ AH ꝏ ▭ CG.

Atqui □ AH fit a segmento AG & ▭ CG continetur CB hoc est AB & altero segmento BG.

Ergo patet factum esse quod quærebatur.

SCHOLIUM.

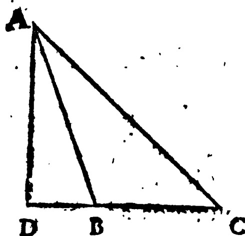
In numeris hæc propositio nullo solvi potest modo, cum radicis quadratæ extractio, quæ hic requiritur, non semper rationales numeros admittat.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Theor. 11.

In triangulo obtusangulo ABC quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, superat reliquorum laterum AB. BC quadrata, bis sumpto rectangulo, quod continetur sub latere CB, & sub ipsa BD in directum ei addita usque ad perpendicularem ab altero acuto angulo A cadentem.



DE-

DEMONSTRATIO.

□ AC ∞ [a] □ AD + □ DC. [a] 47. I.
Atqui □ DC [b] ∞ □ DB + □ BC [b] 4. II.
+ 2 ▭ DBC.

Ergo hisce in locum □ DC positis.

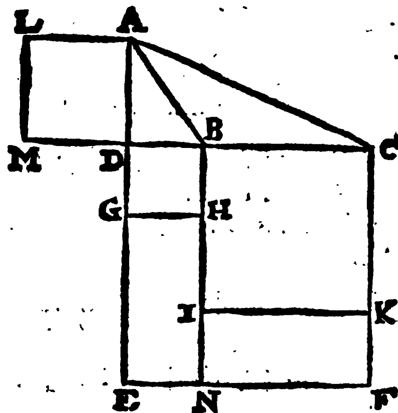
□ AC ∞ □ AD + □ DB + □ BC
+ 2 ▭ DBC.
Atqui rursus Duo □ta AD. DB [a] ∞
□ AB.

Ergo hoc in illorum locum reposito.

□ AC ∞ □ AB + □ BC + 2 ▭
DBC.

Vel

Vel clarius & quasi ad oculum hoc modo.



1. Super DC facto □to DF, ducatur BN parallela DE.

2. Factis BH, & NI ∞ DB, ducantur GH & IK parallelæ ipsi DC.

3. Super AD construatur □um LD.

Tunc BK est quadratum baseos BC. Et DH quadratum ipsius DB.

Rectangulum HE comprehenditur sub HG. GE seu DB. BC.

Re-

Rectangulum IF comprehenditur sub IN. NF seu DB. BC

□ AC ∞ □ AD ✠ □ DC.

Seu

□ AC ∞ □ DL ✠ □ DH.

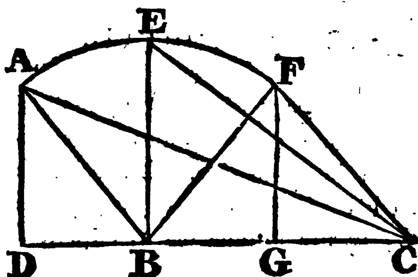
Hoc est □ AB

✠ □ BK ✠ 2 ▭lis HE. IF.

Adeoque patet duobus □tis, quæ fiunt a lateribus AB, BC, debere addi ▭la HE. IF: seu bis sumptum ▭ DB. BC, ut ista summa fiat ∞ □to AC.

SCHO-

SCHOLIUM I.



Hoc modo paulo aliter eadem propoſitio demonſtrari poteſt.

Ex B erigatur perpendicularis BE ∞ BA, & ducatqr EC.

Hoc facto duo ttiangula ABC. EBC habent duo latera AB. BC æqualia ipſis EB. BC: at vero angulum ABC < angulo EBC: Ergo per 24. I. baſis AC erit < EC. Adeoque □ AC < □to EC hoc eſt □tis EB ſ. AB & BC.

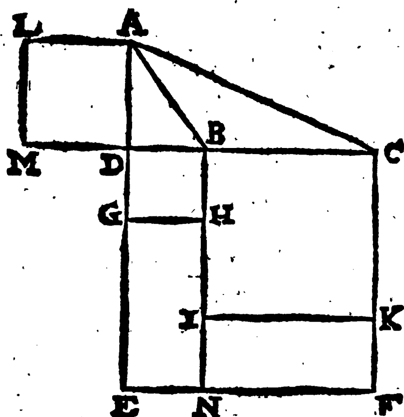
Unde patet nihil aliud requiri, quam ut inveniatur differentia □:orum AC EC.

□ AC ∞ □ AD + □ DC.
Atqui □ DC ∞ □ DB + □ BC + 2 ▭ DBC.
Ergo.
□ AC ∞ □ AD + □ DB + □ BC + 2 ▭ DBC.
Atqui □ta AD. DB. ∞ □to AB f. EB.
Ergo.
□ AC ∞ □ EB + □ BC + 2 ▭ DBC
□ EC ∞ □ EB + □ BC

Quæ si a se invicem subtrahantur, erit 2 ▭ DBC differentia □torum AC. EC seu excessus quo □ AC superat □ EC, hoc est quadrata EB BC. seu AB, BC.

SCHOLIUM II.

Ex hac propositione deducitur generalis Regula Geometrarum, qua ex tribus trianguli obtusanguli lateribus cognitis inveniunt basin productam vel illius segmentum BD. quæ imperat, ut a quadrato AC demta summa quadratorum AB. BC, reliquum dividatur per duplum baseos BC; quæ operatio exhibebit quæsitam DB.



Quare si in Triangulo obtusangulo ABC ponatur latus AB 13. BC 4. & AC 15, invenietur per hoc Scholium DB 5: Et propositio sic demonstrabitur.

In numeris.

□ AC 225. DB 5. BC 4.] M.

▭ DBC 20. 2.] M.

2 ▭ DBC 40.
□ AB 169.
□ BC 16. } A.

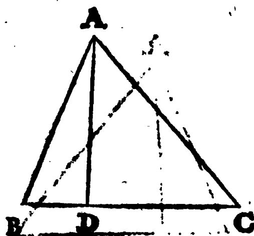
Summa 225. æ □ AC.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

In acutangulo triangulo ABC quadratum lateris AB, quod acuto angulo C opponitur, superatur a quadratis reliquorum laterum AC, BC, bis sumto rectangulo sub latere CB & sub assumpta interius linea CD usque ad occursum perpendicularis ab altero angulo acuto A cadentis. Theor. 12.



DEMONSTRATIO.

a 7. II. □ BC ✠ □ DC ∞ 2 ▭ BC CD ✠ □ BD. } A.
□ AD   □ AD

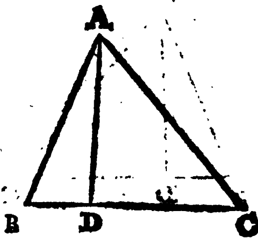
□ BC ✠ □ AD ✠ □ DC ∞ □ AD ✠ □ DB ✠ 2 ▭ BCD.

Atqui duo □ta AD. DC ∞ □ AC.
Et duo □ta AD. DB ∞ □ AB. } 47. I.

Ergo his in illorum locum substitutis.

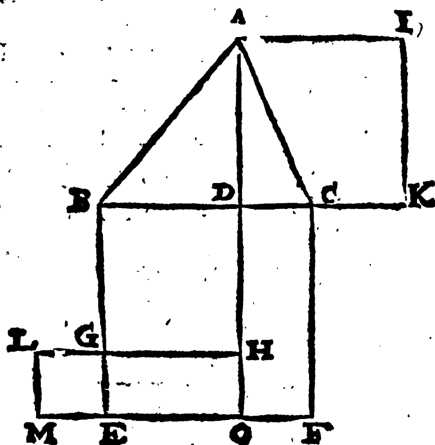
□ BC ✠ □ AC ∞ □ AB ✠ 2 ▭ BC. CD.

Q. E. D.



Alia

Alia DEMONSTRATIO.



1. Super basi B C facto quadrato BF. producatur A D in O.

2. Facto O H ꝏ O F, ducatur H G parallela F E.

3. Super A D, & G E fiant quadrata D I. E L.

Tunc G D est quadratum segmenti B D: Rectangulum D F comprehenditur sub D C. C F seu D C. C B. Et Rectangulum H M sub H L. L M. seu D C. CB.

 □ BC

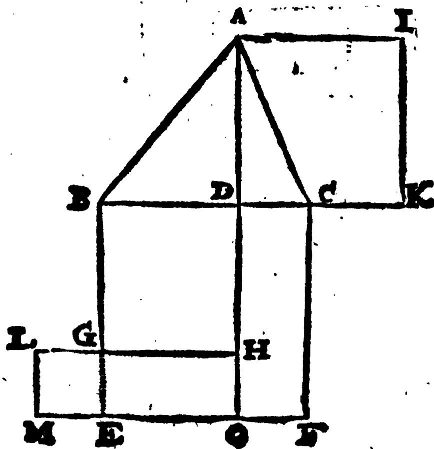
A { □ BC ∞ □ BH cum duobus ▭lis DF. HE.
□ AC ∞ □to AK a latere AD cum □ MG a latere ME ∞ DC.

□ BC ⊞ □ AC ∞ 2 □tis GD. DI

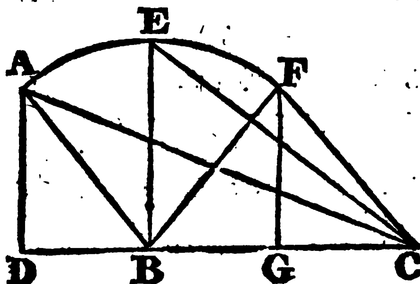
Hoc est.

□to AC ⊞ 2 ▭lis DF. HM.

Ergo patet quadrato AB debere addi duo ▭la DF. HM: seu bis sumtum ▭lum BC. CD, ut ista summa fiat ∞ duobus quadratis BC. AC.



Tertia DEMONSTRATIO.



Triangulum acutangulum ſit, F B C, demonſtrandum eſt duo quadrata FB. BC, ſuperare quadratum F C per duplum ▭ C B G.

Ex B erigatur perpendicularis B E ∞ B F, & ducatur E C, tum duo triangula EBC. FBC, habebunt duo latera EB. B C, ∞ lateribus F B. B C & angulum E B C < F B C: quare per 24. I. latus E C erit < F C. Adeoque E C hoc eſt duo quadrata E B. ſeu F B. B C erunt < □ F C.

Unde ſi quadratum F C ſubtrahatur a quadrato E C, obtinebitur differentia ſeu exceſſus, quo quadrata F B. B C. ſupe-

rant quadratum F C, adeoque demonstrata erit propositio.

$$\square EC = \square EB \text{ seu } \square FB + \square BC.$$

Atqui

$$\square BC = \square BG + 2 \sqsubset\!\sqsupset BGC + \square GC.$$

Ergo facta substitutione.

$$\left.\begin{array}{l} \square EC = \square FB + \square BG + 2 \sqsubset\!\sqsupset BGC \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \square GC \\ \square FC = \square FB - \square BG + \square BC. \end{array}\right| S.$$

$$\square EC - \square FC = 2 \square BG. \text{ f. } 2 \sqsubset\!\sqsupset BG.BG$$
$$+ 2 \sqsubset\!\sqsupset GC.BG$$

Seu

$$2 \sqsubset\!\sqsupset BC.\ BG.$$

Hoc est duplum $\sqsubset\!\sqsupset$ sub basi B C & segmento B G; pro differentia qua quadratum E C, hoc est duo quadrata E B. seu F B + B C excedunt quadratum F C.

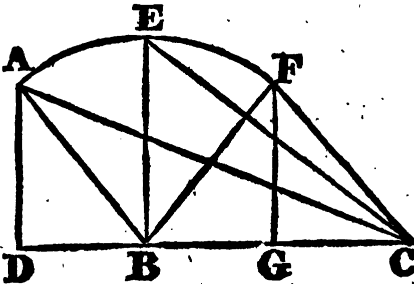
SCHOLIUM. I.

Simili operatione quoque innotescet, differentia quadratorum A C & F C: quorum primum opponitur angulo obtuso A B C. alterum vero acuto F B C.

$\square$ A C

□ AC ꝏ □ AB + □ BC + 2 ▭ DB. BC. 12. II.
□ CF ꝏ □ FB seu □ AB + □ BC — 2 ▭ BG. BC. 13. II. } S.

□ AC — □ CF ꝏ 2 ▭ DB. BC + 2 ▭ BG. BC.
seu 2 ▭ DG. BC.



Ex quo calculo sequitur hoc Theorema.

Si triangulum obtusangulum ABC cum acutangulo FBC latera AB. BC. lateribus FB. BC æqualia habeat; quadratum lateris obtuso angulo oppositi AC, superabit quadratum lateris acuto angulo oppositi FC, per duplum rectan-

 gulum

gulum quod fit a basi BC & DG inter duas perpendiculares AD. FG intercepta.

SCHOLIUM II.

Fig: p: 228. Hinc iterum fluit Geometrarum regula ad inveniendum baseos segmentum CD, ex tribus trianguli acutanguli lateribus cognitis: quod invenitur si a summa quadratorum AC. CB. (circa angulum segmento adjacentem) subtrahatur quadratum AB, & reliquum per duplam basin BC dividatur.

Quare si in Triangulo acutangulo ABC, ponatur latus AC 13. BC. 14. AB. 15: invenietur per hoc Scholium baseos segmentum DC 5. Et propositio sic demonstrabitur.

In numeris.

□ AC	169	A.
□ BC	196	

□ AC + □ BC 365

BC

BC 14. } M.
CD 5.

▭ BC. CD 70. M.
2.

---

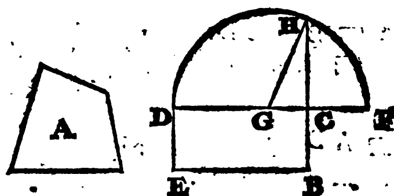
2 ▭ BC. CD. 140. } A.
□ AB 225.

□ AB + 365.
2 ▭ BC. CD.

Ut requiritur.

PROPOSITIO XIV.

Probl. 2. *Dato rectilineo A æquale quadratum constituere.*



CONSRUCTIO.

a 45. 1. 1. Constituatur ▭ BD ∞ rectilineo A: quod si habeat latera æqualia, obtinemus quadratum quæsitum. Si véro non tum

2. Producatur latus DC in F, ut CF sit ∞ CB.

3. Linea DF bisecta in G, centro G radio GD vel GF describe semicirculum DHF.

4. Latus BC producatur ad semicirculum in H.

Dico quadratum CH esse ∞ rectilineo A.

DE-

DEMONSTRATIO.

▭ DC. CB (seu CF) + □ GC [b] ꝏ □ GF. s. □ GH. b 5. II.

Atqui □ GH [c] ꝏ □ GC + □ CH. c 47. I.

Ergo his in illius locum substitutis.

▭ DC. CB + □ GC ꝏ □ GC + □ CH.

Si auferatur utrimque □ G C.

▭ DCB ꝏ □ CH.

Atqui ▭ DCB ꝏ rectilineo A per constr.

Ergo □ CH etiam est ꝏ eidem rectilineo A.

Q. E. D.

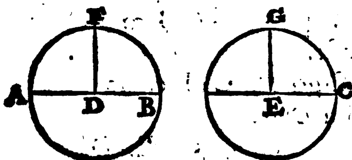
Elementorum Libri Secundi Finis.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

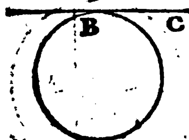
I.



Æquales circuli sunt, quorum diametri AB. BC. sunt æquales: vel quorum, quæ ex centris D. & E. rectæ lineæ DF. EG. sunt æquales.

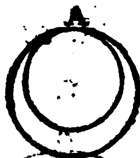
II.

II.



Recta circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat puta in B. ſi producatur in C. circulum non ſecat.

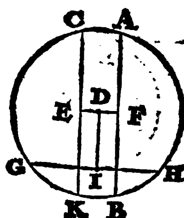
III.



Circuli ſe mutuo tangere dicuntur qui ſeſe mutuo tangentes ut in A. ſeſe mutuo non ſecant.

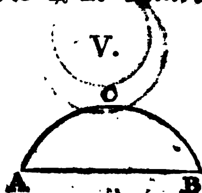
IV.

IV.



In circulo æqualiter distare à centro rectæ dicuntur, cum perpendiculares DE. DF. *à centro* D. *ad ipsas* AB. CK. *ductæ æquales sunt; longius autem abesse dicitur* GH. *in quam major perpendicularis* DI. *cadit.*

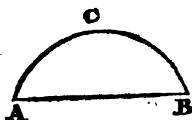
V.



Segmentum circuli, est figura quæ sub recta AB. *& circuli peripheria* ACB. *comprehenditur.*

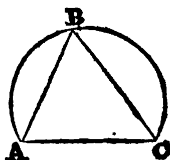
VI.

VI.



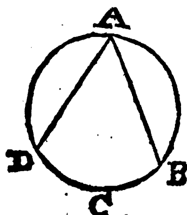
Segmenti autem angulus est CAB. qui sub recta linea AB. & circuli peripheria CA. comprehenditur.

VII.



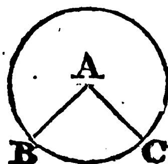
In segmento autem angulus est puta *ABC. cum in segmenti circumferentia sumptum fuerit punctum quodpiam B. & ab eo in terminos rectæ AC. segmentum terminantes lineæ rectæ, ut BA. BC. fuerint ductæ.*

VIII.



Cum verò comprehendentes angulum D A B. rectæ A D. A B. aliquam assumunt peripheriam ut B C D. illi angulus dicitur insistere.

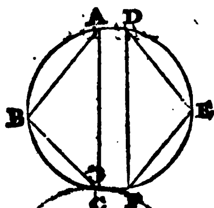
IX.



Sector circuli est, cum ad ipsius circuli centrum A. angulus A B C. fuerit constitutus: comprehensa nimirum figura & à rectis AB. AC. angulum B A C. continentibus, & à peripheria B C. ab illis assumpta.

X.

X.

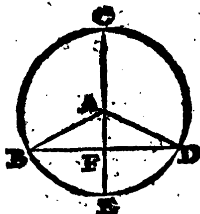


Similia circuli segmenta sunt ABC. DEF. quæ angulos BAC. EDF. capiunt æquales, aut in quibus anguli CBA. FED. inter se sunt æquales.

Proprie segmenta similia illa dicuntur, quæ suorum integrorum Circulorum sunt partes similes, seu ejusdem denominationis; hoc est si unum segmentum sit vel pars $\frac{1}{2}$, vel, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ sui circuli, ut alterum etiam sit, $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ sui circuli. Unde sequitur si integri circuli sint æquales, illorum similia segmenta etiam necessario debere esse æqualia; ut & duo, vel plura segmenta similia ejusdem circuli esse inter se æqualia.

PROPOSITIO I.

Probl. I. *Dati Circuli BCD centrum A reperire.*



CONSTRUCTIO.

1. In circulo ducta quælibet BD dividatur bifariam in F. a

a 10. I. 2. Ex F erigatur utrimque perpendicularis CE usque ad circumferentiam. b

b 11. I. 3. Ista CE bisecetur in A. a

Dico punctum A esse centrum Circuli.

DE-

DEMONSTRATIO.

Cum ex F (si illud non sit in Centro) recta linea semper ad centrum possit duci, ponamus ex F, ad lineæ FC aliquod punctum, ut A, tanquam ad Centrum ductam esse lineam rectam FA; quo casu ex definitione & primaria proprietate circuli duæ rectæ AB, AD erunt radii istius Circuli, atque inde æquales.

Adeoque in Triangulis		AFB.	AFD
	Latus	AF ∞	AF.
		AB ∞	AD.
		FB ∞	FD.

Ergo per 8. I.
Angulus AFB ∞ AFD.
Adeoque ambo recti.

Unde patet lineam ex F ad centrum ducendam debere esse perpendicularem ad medietatem lineæ BD.

Atqui per constructionem linea EAC, per medium ipsius BD ducta est perpendicularis.

Ergo etiam naturaliter sequitur centrum esse in ista perpendiculari EC: & quidem in ejus puncto medio A. ut fiant radii AC. AE inter se æquales.

Hinc jam sequens immediate deducitur.

COROLLARIUM.

Si recta linea C E in Circulo aliam lineam B D bisariam in F, & ad angulos rectos B FC D F C secet, in illa bisecante C E erit Circuli centrum A.

Vide Figuram præced:

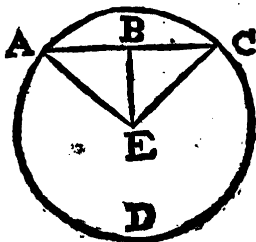
DEMONSTRATIO.

Hæc clare & quasi ad oculum patet ex præcedente Demonstratione; vel potius cum illa est eadem.

PRO-

PROPOSITIO II.

Si in peripheria Circuli ADC duo quælibet puncta A. C. sumantur, recta AC, quæ per illa ducitur, intra circulum cadit. Theor. 2.



DEMONSTRATIO.

Ex invento Centro E. ductis radiis EA. EC, ad rectam AC ducatur EB.

Tum in Triangulo. EAC.

Latus EA ∞ EC quia radii.

Ergo ang. A ∞ C. 5. I.

a 16. I. Atqui externus E B A [a] $<$ interno C.

Ergo E B A etiam $<$ A.

Adeoque in triangulo E B A latus E A
b 19. I. oppositum angulo maximo erit [b] $<$ latere E B.

Atqui latus E A pertingit tantum ad peripheriam.

Ergo latus E B cadit intra circulum.

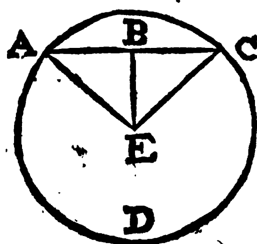
Et eadem demonstratio applicari potest ad omnia puncta lineæ A C.

Ergo tota linea A C cadit intra Circulum. Q. E. D.

SCHOLIUM.

Si supra A C ducatur alia atque alia linea, illa puncta A & C propius ad se invicem accedent, donec tandem coincidant in unum & idem punctum, ut hic in B.

Tunc



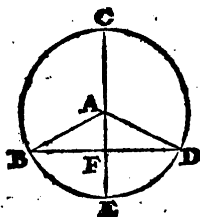
Tunc linea, quæ per illud punctum B ducitur, non transit per duo diversa puncta, (ut antea erant A & C) sed per unum adeoque non secat circulum; sed illum tangit.

Unde jam concludere licet, lineam rectam C Circulum in uno tantum puncto B tangere; id quod infra ex Prop. 16. hujus libri ulterius patebit.

PROPOSITIO III.

PARS I.

Theor: 2. *Si in circulo recta quædam CE per centrum A ducta, aliam BD non per centrum ductam, bifariam in F secet; etiam illam ad angulos rectos secabit.*



PARS II.

Et si ad angulos rectos eam secet; bifariam quoque secabit.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ductis radiis AB. AD, in triangulis AFB. AFD.

Latus

Latus A B ∞ A D quia radii.
Latus F B ∞ F D per propoſitionem.
Latus A F commune.

Ergo omnes anguli ſunt inter ſe æquales, per 8. I. adeoque Ang. A F B ∞ A F D. qui propterea ſunt [a] recti. a Def. 10. I.

Pars 2. In iiſdem triangulis AFB. AFD.

Ang. ABF ∞ ADF. quia triang. BAD eſt Iſoſceles.
Ang. A F B ∞ A F D per propoſitionem.
Latus A F commune.

Ergo latus B F [b] ∞ F D. b 26. I.
Q. E. D.

COROL.

COROLLARIUM.

Si in Triangulo æquilatero seu Isoscele BAD recta AF basin BD secet bifariam, illa eandem perpendiculariter secabit & contra.

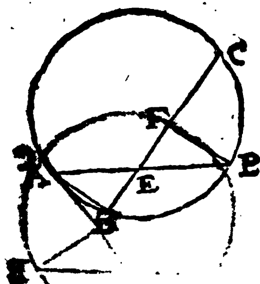
DEMONSTRATIO.

Si centro A radio AB vel AD describatur Circulus, & recta AF utrinque producatur in C & E, utriusque hujus partis demonstratio erit eadem cum propositione.

Licet etiam hoc Corollarium independenter a circulo suam habeat veritatem.

PROPOSITIO IV.

Si in Circulo duæ rectæ AB. DC non ambæ per centrum ductæ, se invicem secent: illæ se mutuo non secabunt bifariam. Theor. 3.



DEMONSTRATIO.

Posito lineam A B, ab altera D C bisecari in E, ducatur A D eique parallela B F.

Tunc in Triangulis A E D. B E F.

Latus A E ∞ B E.
Angulus E [a] ∞ E. a 15. 1.
Angulus A [b] ∞ B. b 29. 1.

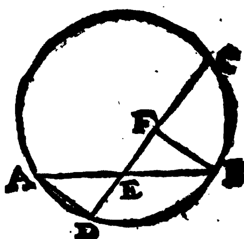
Ergo

Ergo per 26. I.
Latus ED ∝ EF.
Atque EC $<$ EF.

Ergo EC $<$ ED.

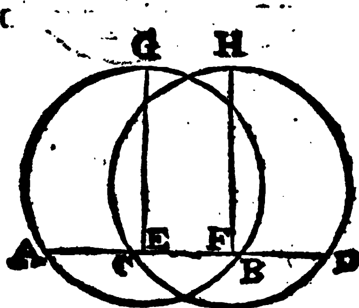
Adeoque DC non viciſſim biſecatur ab altera AB.

Atque hæc demonſtratio habet locum ſive DC per centrum tranſeat ſive non, cum in omni poſitione duci poſſit AD & ei parallela BF.



PROPOSITIO V.

Si duo Circuli AGB. CHD sese mutuo secent, non habebunt idem centrum. Theor. 4.

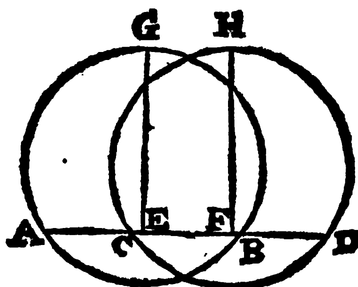


DEMONSTRATIO.

Ducatur recta AD secans utrumque circulum.

Tum AB. CD. utrique circulo inscriptæ erunt diversæ, adeoque illarum puncta media E & F. diversa; & consequenter ex illis eductæ perpendiculares EG, FH diversæ.

Cir-



Circuli autem AGB centrum est in perpendiculari EG[a]; & Circuli CHD centrum in altera perpendiculari FH[a]; a priori diversa.

a Cor. 1. III.

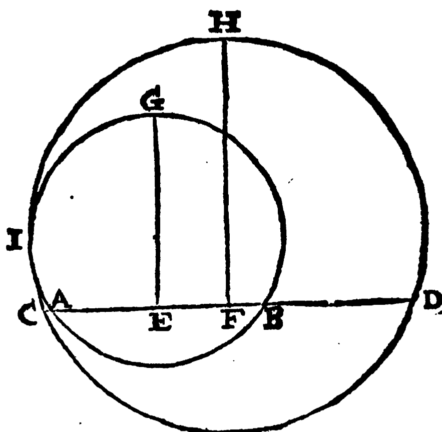
Ergo isti circuli non habent idem centrum.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO VI.

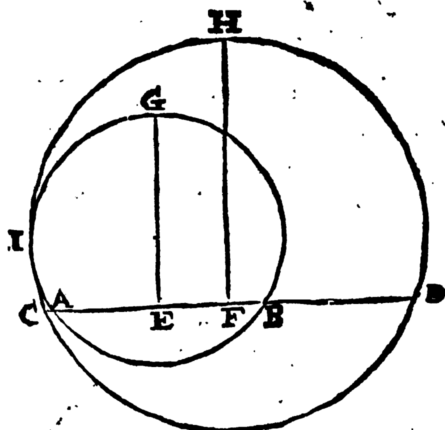
Si duo Circuli AGB. CHD se mutuo interius tangant in I, non erit illorum idem Centrum. Theor. 5.



DEMONSTRATIO.

Ducatur recta CD secans utrumque circulum.

R. Tum



Tum A B. C D utrique circulo inſcriptæ erunt diverſæ, adeoque illarum puncta media E & F diverſa; & conſequenter ex illis eductæ perpendiculares E G, F H, diverſæ.

Circuli autem A G B centrum eſt in perpendiculari E G [a]; & Circuli C H D centrum in altera perpendiculari F H [a]; a priori diverſa.

a Cor. 1. III.

Ergo iſti circuli non habent idem centrum.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Si in circulo quovis extra centrum F accipiatur punctum G, ex quo quædam rectæ GA. GC. GD. GE. GN. in circulum cadant. Theor. 6.

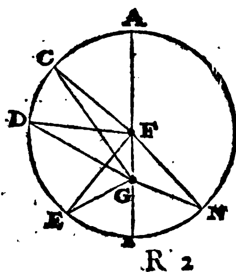
Tum

1. *Maxima erit GA, quæ per centrum F transit.*

2. *Minima erit reliqua diametri pars GB.*

3. *Aliarum vero major est GC, quæ maximæ GA propior.*

4. *Neque plures quam duæ ab illo puncto G ad circumferentiam duci possunt æquales.*



DEMONSTRATIO.

Pars 1. Ductâ F C. in triangulo GFC.

Duo latera GF. FC < a GC.

a 20. 1. Atqui GF. FC ꝏ GA. quia FC ꝏ FA.

Ergo GA < GC.

Pars 2. Ducta FE. In Triangulo FGE

Duo latera FG. GE. a < FE. hoc est F B. } S

FG. FG.

b Ax. 4. GE b < GB.

Pars 3. Ducta FD, in triangulis CFG. & DFG.

Latus CF ꝏ DF.

Latus FG utrique commune.

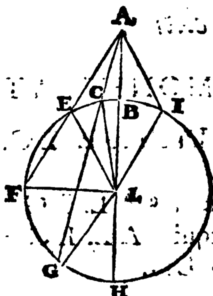
Sed Ang. CFG. < DFG.

c 24. 1. Ergo basis CG c < DG.

Pars 4. Hæc patet ex præcedentibus; cum enim omnes rectæ supra aut infra duas æquales positas GE: GN ductæ, ipsis sint aut majores aut minores, sequitur nullas iis esse æquales. PRO-

PROPOSITIO VIII.

Si a puncto A extra circulum accepto ad circulum ducantur quædam rectæ AH. AG. AF, Theor. 7.



1. *Earum quæ in cavam peripheriam incidunt maxima erit AH, quæ per centrum L transit.*

2. *Aliarum major est ea, AG, quæ maximæ AH propior.*

3. *Extra circulum minima est AB, quæ producta per centrum transit.*

4. *Quæ minimæ propior AC remotiore AE minor erit.*

5. *Non plures quam duæ ex dicto puncto A in peripheriam duci possunt æquales sive intra circulum sive extra.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ducta recta LG. in triangulo ALG.

a 20. I. Duo latera a AL. LG > AG.

Atqui AL. LG = AH. quia LG = LH.

Ergo AH > AG.



Pars

Pars 2. Ducta linea LF, in triangulis ALG. ALF.

Latus AL utrique commune.
Latus LG ꝏ LF. quia sunt radii.
Atqui ang. ALG. $<$ ALF.

Ergo basis AG [b] $<$ basi AF. b 24. I.

Pars 3. Ducta LC. in triangulo ACL.

Duo latera AC. CL. [a] $<$ AL. } S a 20. I.
CL. ꝏ BL.

Remanet AC $<$ [c] AB. c. Ax. 4.

Pars 4. Ducta LE, in triangulis AEL ACL.

Duo latera exteriora
AE. EL [d] $<$ AC. CL. } S d. 21. I.
LE ꝏ LC.

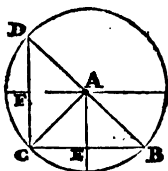
Remanet AE $<$ AC.

Pars 5. Patet ex præcedentibus; nam ducta AI ꝏ AE. quæ intra AI ducitur erit illâ minor: quæ extra: illâ major: adeoque ex A non possunt duci plures quam duæ quæ sint æquales. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

Theor. 8.

Si ab aliquo intra Circulum puncto A plures quam duæ rectæ æquales AB. AC. AD ad peripheriam duci possint: Illud punctum erit centrum.



DEMONSTRATIO.

Ductas rectas DC CB. divide bifariam in F & E per rectas FA. EA.

Tum in triangulis AFD. AFC.

Latus AF utrique commune.

Latus AD ∞ A C. per propositionem.

Latus FD ∞ FC. per constructionem.

Ergo

Ergo Ang. AFD [a] ∞ AFC & uterque [b] rectus: adeoque in perpendiculari FA erit centrum. [c] a 8. I. b Def. 10. I: c Corol. 1. III.

Deinde eodem modo per triangula AEC. AEB demonstratur centrum etiam esse in perpendiculari EA.

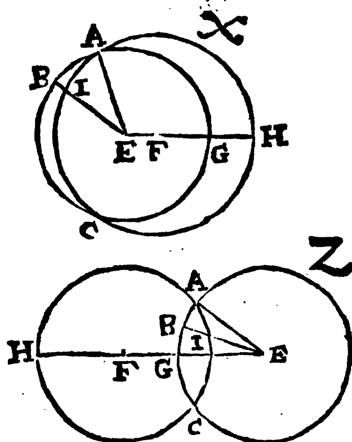
Ergo necessario erit in puncto intersectionis A. quia duæ lineæ FA. EA præter illud nullum habent commune.

Q. E. D.



PROPOSITIO X.

Theor. 9. *Duo circuli ABC. AHC, se mutuo non secant in pluribus quam duobus punctis A. & C.*



DEMONSTRATIO.

Per centra circulorum E & F ducatur recta EFH ut & ex unius Circuli centro

tro E, ad punctum intersectionis A ducatur recta E A.

Deinde ex eodem centro E ducatur quilibet radius E B, qui alterum circulum secet in puncto I.

Tum E A est major quam E I, in figura X per 7. III. & in figura Z per 8. III.

Atqui E A ∞ E B, quia sunt radii.

Ergo E B est major quam E I.

Adeoque duo arcus A B C. A I C se mutuo non secant in puncto I.

Eodemque modo demonstrari potest sectionem non fieri in ullo alio puncto arcus A I C.

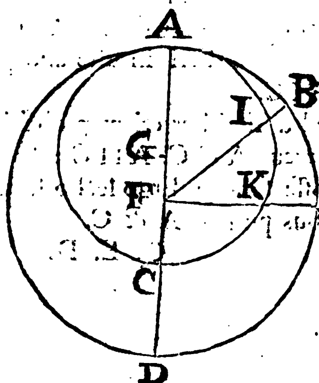
Haud dissimiliter etiam probabitur reliquos arcus A G C. A H C: se mutuo non posse secare: Ergo sectio fit tantum in duobus punctis A & C.

Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

Theor. 10.

Si duo circuli A B D. A I C, se interius tangant in A: recta F G illorum centra F. G. conjungens, si producatur, transibit per contactum A.



DEMONSTRATIO.

Producta GF in D, quæ secet circulum interiorem in C, ducantur in circulo

culo exteriori radii FH. FB : ſecantes alterum in K & I.

Tum in circulo interiori FC per 7. III, erit minima quæ ex F ad circumferentiam duci poteſt; adeoque erit CD diſtantia iſtorum circulorum maxima.

Eſt autem FK major quam FC.

Ergo diſtantia KH minor quam CD.

Iterum eſt FI major quam FK.

Adeoque diſtantia IB minor quam KH.

Denique eſt FA major quam FI.

Idcirco diſtantia in A minor quam IB.

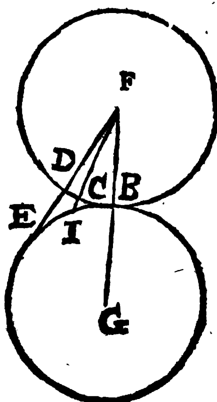
Quia autem per 7. III. FA. abſolute eſt omnium maxima, ex prioribus ſequitur diſtantiam in A abſolute eſſe omnium minimam, ſeu potius, (quia circuli ponuntur aliquo loco ſe tangere) omnino nullam; Adeoque patet lineam FG, quæ eſt in omnium maximâ, neceſſario cadere in contactum circulorum, ſi producatur. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Theor. 11.

Si duo circuli D CB. E I B se invicem exterius contingant in B. Recta FG, quæ illorum centra F. G. conjungit, per contactum B. transibit.



DEMONSTRATIO.

Ex superioris circuli centro F, per illius

illius puncta D. C, ad inferiorem circulum ducantur rectæ FE. FI.

Tum respectu hujus inferioris circuli per 8. III. erit FE major quam FI.

Ergo distantia DE major quam CI.

Iterum FI major quam FB.

Ergo distantia CI major quam in B.

Quia jam per eandem 8. III. FB absolute est omnium minima, ex prioribus sequitur circulorum distantiam in B absolute esse omnium minimam, seu potius (quia circuli ponuntur aliquo in loco sese tangere) omnino nullam. Adeoque patet lineam FG, in qua est omnium minima, necessario transire per contactum circulorum.

Q. E. D.

PRO-

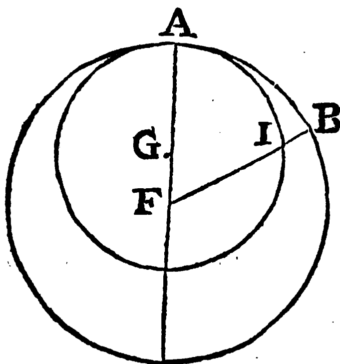
PROPOSITIO XIII.

Theor. 12.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis quam uno sive intra sive extra tangat.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.



Ducta FG, quæ centra conjungat; illa producta per 11. III. cadet in contactum A:

Deinde

Deinde ducatur FIB. tum erit per 7. III. in interiori circulo.

FA. major quam FI.

Atqui FA pertingit ad circumferentiam exterioris circuli.

Ergo FI illam non attingit.

Adeoque duo isti circuli se mutuo non tangunt in puncto I.

Et eadem demonstratio locum habet in omnibus punctis minoris circuli extra A positis.

Ergo duo isti circuli tantum in uno puncto A se mutuo tangunt.

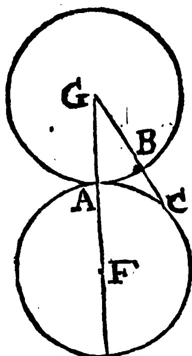
Vel hoc modo.

Ex prop. 11. præced. ejusque demonstratione patet punctum contactus esse in A, ubi circuli interioris maxima FA cadit.

Atqui ista maxima est tantum unica.

Ergo tantum est unum punctum contactus, sc. in A.

Casus II.



Ducatur recta GF quæ centra G & F conjungat; illa per 12. III. transit per punctum contactus A: Deinde ducatur recta GBC. Tum erit per 8. III.

GC major quam GA.
Atqui GA ∞ GB.

Ergo GC major quam GB.

Adeoque circulus superior G non tangit inferiorem F in B.

Et eadem demonstratio habet locum in omnibus punctis circuli G superioris.

Ergo &c.

Vel

Vel etiam hoc modo.

Ex prop. 12. ejusque demonstratione patet punctum contactus esse in A, ubi circuli superioris minima GA cadit.

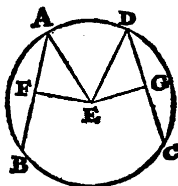
Atqui ista minima est tantum unica.

Ergo tantum unum est punctum contactus, sc. in A.

PROPOSITIO XIV.

Theor. 13. *1. Æquales rectæ AB. DC in circulo æqualiter a centro distant.*

2. Et æqualiter a centro distantes inter se æquales sunt.



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Ex centro E ductæ perpendiculares
a 3. III. EF. EG. lineas AB. DC a bisecabunt: & quia totæ sunt æquales, erunt etiam semisses AF. DG æquales: ducantur deinde radii EA. ED. Tum

In Triangulis AFE. DGE.

Latus EA ∞ ED.

Latus AF ∞ DG.

Angulus F ∞ G.

Ergo

Ergo per Schol. Prop. 26. I.
Latus EF ∞ EG.
Adeoque distantiæ æquales. [a]

a Def. 4. III.

PARS II.

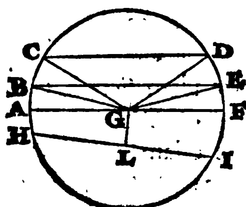
In iisdem Triangulis AFE. DGE.
Latus EA ∞ ED
Latus EF ∞ EG
Angulus F ∞ G

Ergo per idem Schol. Prop. 26. I.
AF ∞ DG.
Adeoque etiam
AB ∞ DC.
Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

1. In circulo ABCD rectarum
Theor. 14. *inscriptarum maxima est Diameter AF.*

2. Reliquarum vero ea BE major quæ centro propior.



DEMONSTRATIO.

Pars I. Ductis GB. GE in triangulo BGE.

a 20. 1. Duo latera [a] BG. GE < BE.
Atqui BG. GE ꝏ AF. Diametro.

Ergo AF < BE.

Pars II. Ductis GC. GD: in triangulis BGE. CGD.

Latus BG ꝏ CG ⎫ Quia sunt ra-
Latus GE ꝏ GD ⎭ dii.
At ang. BGE < CGD.
b 24. 1. Ergo basis BE [b] < CD.

Q. E. D.

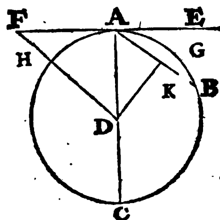
PRO-

PROPOSITIO XVI.

Si per extremitatem diametri A ducatur perpendicularis FE. Theor. 51.

1. Illa cadet extra circulum.

2. Neque inter ipsam & circulum alia recta ad contactum A duci potest, quæ circulum non secet.



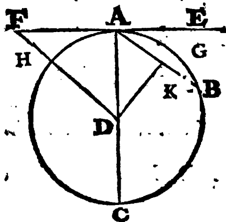
DEMONSTRATIO.

Pars I. Ex centro D ad quodlibet punctum F ducta DF, erit in triangulo DAF.

Angulus A < F. quia angulus A rectus.
Ergo Latus (a) DF < latere DA. a 19. I.
Atqui DH ∞ DA. quia sunt radii.

Ergo DF < DH. Adeoque quia punctum H est in circumferentia erit F extra.

Idem ratiocinium omnibus punctis lineæ FAE potest applicari: adeoque tota FE (excepto puncto A) erit extra circulum.



Pars II. Infra AE ducta qualibet AB, ad ipsam ex centro D ducatur perpendicularis DK. Eritque in triangulo DKA.

Ang. DKA $\prec$ DAK.

b 19. 1. Ergo latus DA [b] $\prec$ DK.

Atqui DA pertingit ad peripheriam. Ergo cadit DK. intra Circulum; adeoque linea AK illum secat.

Et eadem demonstratio habet locum in omnibus lineis quæ ducuntur infra AE.

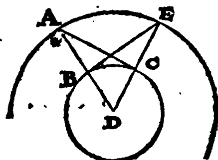
COROLLARIUM.

Hinc rursus patet rectam lineam Circulum tantum in uno puncto tangere: nam demonstratum est totam rectam FE cadere extra circulum excepto unico puncto A; adeoque in illo sese tantum contingunt.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

A dato puncto A rectam lineam AC ducere quæ circulum datum BCD tangat. Probl. 2.



CONSTRUCTIO.

1. Ex puncto A ad centrum ducatur recta AD.

2. Centro D radio DA describatur circuli arcus AE.

3. Ex puncto B erigatur perpendicularis BE.

4. Juncta ED, ducatur AC.

Dico lineam AC tangere circulum.

DEMONSTRATIO.

In triangulis ADC. EDB.

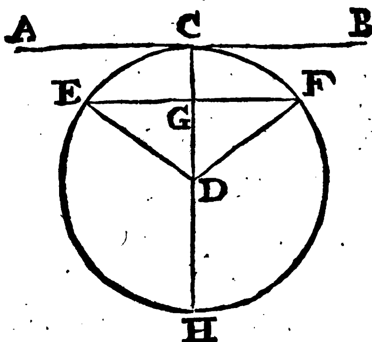
Latus AD ∞ ED ⎤ Quia sunt radii eorum-
Latus DC ∞ DB ⎦ dem circulorum.
Angulus D communis.

Ergo [a] Ang. ACD ∞ EBD. a 4. I.
Atqui Ang. EBD est rectus per const.

Ergo etiam ACD est rectus: adeoque linea AC [b] tangit circulum. b 16. III.

PROPOSITIO XVIII.

Theor. 16. *Si recta linea AB tangat circulum, quæ ex centro D ad contactum C ducitur, illa Tangenti AB perpendicularis erit.*



DEMONSTRATIO.

Ducta EF parallela Tangenti AB, ut & Radiis DE. DF erit.

In Triangulis DEG. DFG.

Latus DE ∞ DF.

Latus DG ∞ DG.

Angulus E ∞ F.

Ergo

Ergo per Scholium 26. I.
Angulus DGE ∞ DGF.
Adeoque etiam per 29. I.
Angulus DCA ∞ DCB.

Ergo DC est perpendicularis Tangenti AB.

Q. E. D.

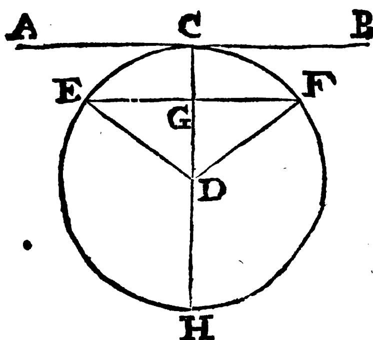
PRO-

PROPOSITIO XIX.

Theor. 17.

Si recta linea AB tangat circulum, & ex contactu C ducatur perpendicularis CH, in illa erit centrum.

Inversa praecedentis XVIII.



DEMONSTRATIO.

Ducta, ut ante, EF parallela AB, & radiis DE. DF erit.

In

In Triangulis DEG. DFG.
Angulus E ∞ F.
Angulus G ∞ G.
quia sunt ∞ ipsis C.
Latus DE ∞ DF.

Ergo per 26. I.
GE ∞ GF.

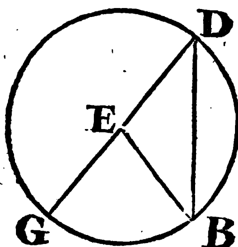
Adeoque per coroll. prop. 1. III. in linea perpendiculari GH seu (quæ eadem est) CH erit centrum circuli.

PRO-

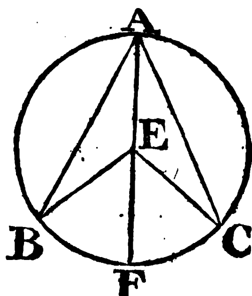
PROPOSITIO XX.

Theor. 18. *Angulus ad Centrum* GEB *duplus est anguli* GDB *ad peripheriam, cum idem arcus* GB *est basis angulorum.*

DEMONSTRATIO.



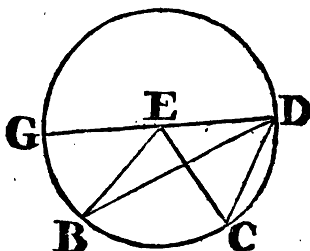
Casus I. In triangulo Isoscele.
Angulus GEB ꝏ ang. D + B. 32. I.
Atqui D ꝏ B. 5. I.
Ergo GEB duplus anguli D.



Casus II. Ducta AF per centrum E,

A [Ang. BEF duplus ang. BAF. / Ang. CEF duplus ang. CAF.] per casum I.

Totus BEC duplus totius BAC.



Casus III. Totus Ang. GEC est duplus totius GDC.
Partialis GEB est duplus partialis GDB. } S

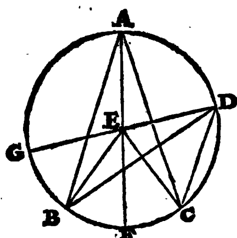
Remanet BEC duplus BDC. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Theor. 19.

In circulo, qui eidem arcui BC insistunt anguli BAC. BDC, seu qui sunt in eodem segmento, sunt inter se æquales.



DEMONSTRATIO.

Angulus BEC est duplus BAC
Atqui id. BEC est duplus BDC] 20. III.

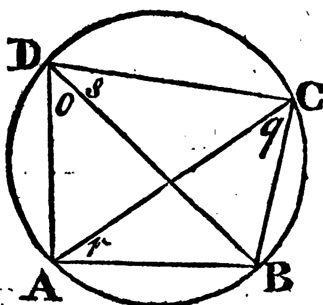
---

a Ax. 7. Ergo BAC a ∞ BDC.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Quadrilateri circulo inscripti ABCD anguli D. B. oppositi duobus rectis sunt aequales. Theor. 20.



DEMONSTRATIO.

Ductis diagonalibus A C. B D.

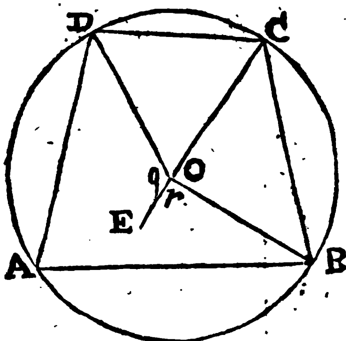
A { Ang. O ∞ Q. [a] quia insistunt arcui A B. — [a] 21. III.
Ang. S ∞ R. [a] quia insistunt arcui C B. }

Totus angulus A D C ∞ Q + R.] A
Angulus A B C ∞ A B C.] T

Duo

Duo anguli ADC. ABC ꝏ tribus Q + R + ABC.

Atqui hi tres sunt ꝏ 2 Rectis.
Ergo & duo ADC + ABC ꝏ 2 Rectis. Q. E. D.



Secunda DEMONSTRATIO.

Ducantur tres radii OD. OC. OB, producaturque OC in E. Tum.

	Angulus DOB est duplus DAB.	
	Angulus Q [a] duplus DCO.	A.
a 20. III.	Angulus R duplus BCO.	

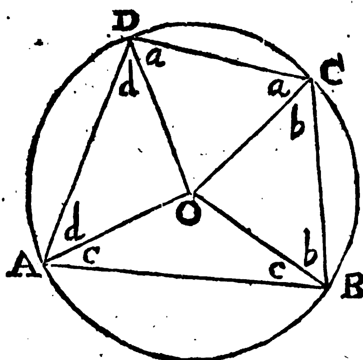
Ergo 3 anguli circa centrum sunt dupli angulorum A & C in quadrilatero ABCD.

Atqui 3 anguli circa centrum sunt [b] æquales 4 Rectis. (b Cor. 15. I.)

Ergo 2 anguli A & C ꝏ 2 Rectis.

Tertia

Tertia DEMONSTRATIO.



Ex Centro ductis ad singulos angulos radiis, obtinentur 4 Triangula Isosce-lia, in quibus anguli

2 A + 2 B + 2 C + 2 D
+ 4 anguli circa O ꝏ [a] 8 Rectis
Atqui
4 anguli circa O ꝏ [b] 4 Rectis } S

a 32. I.
b Coroll. 15. I.

---

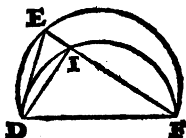
2 A + 2 B + 2 C + 2 D ꝏ 4 Rectis
Adeoque sumtis semissibus.

A + B + C + D.
Hoc est.
Anguli A & C ꝏ 2 Rectis.
Vel D & B.

PROPOSITIO XXIII.

Theor. 21.

Si super eadem recta DF constituta sint duo segmenta circulorum inaequalia; illa non sunt similia.



Ductis DE. EF. DI, respectu trianguli DEI, angulus externus DIF. per 16. I. est major interno DEI:

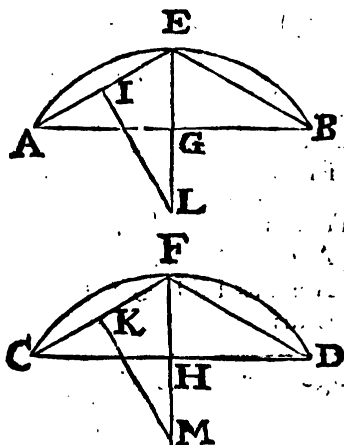
Ergo ista segmenta non capiunt angulos aequales.

Adeoque per Def. 10. III. non sunt similia.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

Segmenta similia AEB. CFD. super æqualibus rectis AB. CD. constituta, inter se sunt æqualia. Theor. 22.



DEMONSTRATIO.

Bisectis AB, CD in G & H, atque ductis perpendicularibus EGL, FHM (in quibus per Coroll: Prop: 1. III. sunt cen-

tra circulorum integrorum) ut & ductis AE. EB: nec non CF. FD: ipsæ AE. CF bisecentur in I & K, & ex iis ducantur perpendiculares IL. KM: in quibus per idem corollarium etiam erunt centra circulorum; quæ idciaco sunt in L & M: adeoque erunt LE, MF radii istorum circulorum.

Facile jam patet duo Triangula AGE. BGE: ut & CHF: DHF se habere juxta 4. I. adeoque angulos AEG. CFH. esse semisses angulorum [a] æqualium AEB. CFD. adeoque ipsos esse æquales: Præterea latus AE ∞ CF; ac idcirco illorum semisses IE. KF esse æquales.

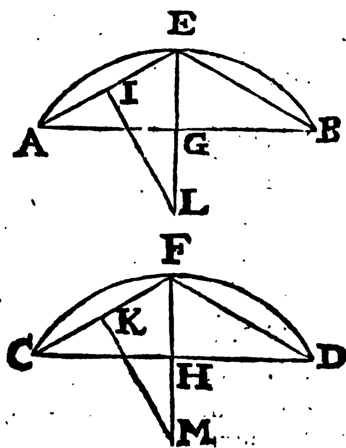
a Def. 10. III.

Tum in Triangulis LIE. MKF.
Angulus LIE ∞ MKF.
Angulus IEL ∞ KFM.
Latus IE ∞ KF.

Ergo latus LE ∞ MF. [b]

b 26. I.

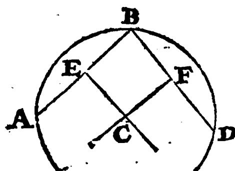
Hoc



Hoc est radii circulorum integrorum sunt æquales: ac proinde etiam ipsi circuli erunt æquales per Def. 1. III. Adeoque etiam illorum partes similes, hoc est segmenta proposita AEB. CFD erunt æqualia juxta illa quæ ad Def. 10. III. dicta sunt.

PROPOSITIO XXV.

Probl. 3. *Circuli datum arcum ABD perficere.*



CONSRUCTIO.

1. Tria puncta ad libitnm sumpta A. B. D. jungantur rectis AB. BD.

2. Dividantur bifariam per perpendiculares EC. FC.

Dico in illarum intersectionis puncto C esse arcus dati centrum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

a Cor. 1. III. Centrum est in perpendiculari EC. Ut & in perpendiculari [a] FC.

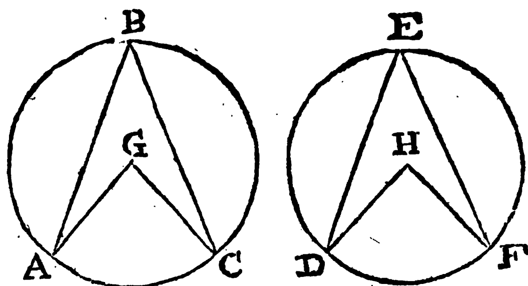
Ergo est in puncto intersectionis; quia illud tantum habent commune, & circuli unicum tantum est centrum.

Adeoque ex centro C arcus perfici poterit. Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Si in circulis æqualibus anguli, sive ad centra. G. H, sive ad peripheriam B. E. sint æquales : tunc etiam arcus A C. D F, quibus insistunt, erunt æquales. Theor. 23.



DEMONSTRATIO.

Concipiamus circulum DEF. superimponi circulo A B C, ut cadat Radius HD super G A; tunc necessario Radius H F cadet super G C, quia angulus H ponitur æqualis ipsi G: Cum jam D jaceat in A & F in C, quia circuli ponuntur æquales,

 arcus

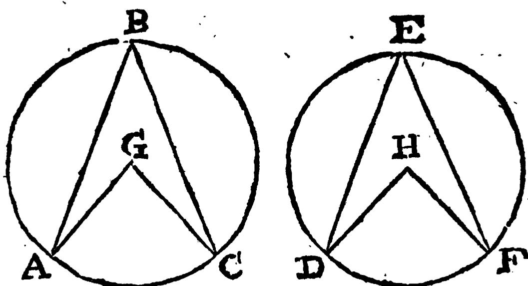
arcus D F. qui eſt menſura anguli H erit æqualis vel potius idem cum arcu A C, qui facit menſuram anguli G æqualis poſiti ipſi A.

Deinde ex æqualitate angulorum B. E ad circumferentias, ſequitur æqualitas an-
a 20. 1. gulorum ad centra G. H. a

Ex his autem jam demonſtrata eſt æqualitas arcuum A C. D F. Adeoque etiam ex æqualitate angulorum B. E, ſequitur æqualitas arcuum A C. D F.

PROPOSITIO XXVII.

Si in æqualibus circulis arcus A.C. DF sint æquales, anguli illis insistentes sive ad centra G. H; sive ad peripherias B. E. sunt inter se æquales. Theor. 24.



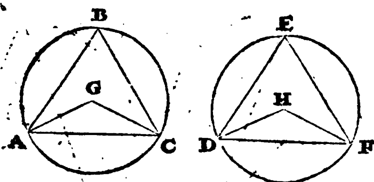
DEMONSTRATIO.

Concipiamus iterum fieri superimpositionem circulorum: quia integri circuli ponuntur æquales, ut & illorum æquales arcus A C, D F: necessario cadet D in A: F in C: & centrum H in centro G: Ergo radius H D jacebit super G A: & radius H F super G C: Ergo per Axioma 8. Erit angulus H æqualis angulo G: adeoque & E æqualis ipsi B.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Theor. 25. *Si in circulis æqualibus ductæ sint æquales rectæ AC. DE: erunt etiam, quos auferunt, arcus AC. DF inter se æquales.*



DEMONSTRATIO.

Ductis rectis GA. GC: HD. HF, in triangulis AGC. DAF.

Latus AG ∞ DH. ⎫ Quia radii æqua-
Latus GC ∞ HF. ⎭ lium circulorum.
Basis AC ∞ DF. per propositionem.

---

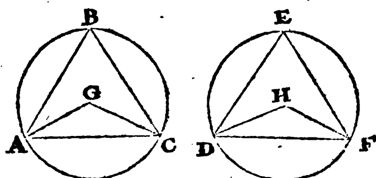
a 8. I. Ergo Ang. AGC [a] ∞ DHF.
b 26. III. Adeoque arcus AC [b] ∞ DF.

Q. E. D.

Ca-

PROPOSITIO XXIX.

Si in æqualibus circulis arcus AC. DF sint æquales; erunt & subtendentes rectæ AC. DF inter se æquales. Theor. 26.



DEMONSTRATIO.

Ductis G A. G C. H D. H F. erunt in triangulis A G C. D H F.

Latus G A ∞ H D ⎤ Quia sunt radii æ-
Latus G C ∞ H F ⎦ qualium circulorum.

Angulus G ∞ [a] H. quia arcus A C ponitur æqualis D F. a 27. III.

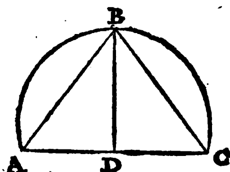
Ergo basis A C [b] ∞ D F. b 4. I.

Q. D. E.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Probl. 4. *Datum circuli arcum ABC bifariam secare.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur recta A C, dati arcus extremitates conjungens.

2. Illa per perpendicularem D B, bisecetur.

Dico Arcum bisectum esse in B.

DEMONSTRATIO.

Ductis rectis A B. C B. erunt in triangulis BD A. BD C.

Latus B D utrique commune.
Latus A D ∞ D C } Per con-
Angulus BDA ∞ BDC } struct.

Ergo Basis B A ∞ [a] B C.
a 4. 1. b 28. 1. Adeoque Arcus B A ∞ [b] B C.
Ergo Arcus A B C divisus est bifariam.
Q. E. F.

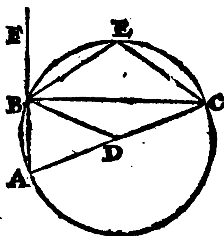
PRO-

PROPOSITIO XXXI.

1. *Angulus ABC in semicirculo rectus est.* Theor. 27.

2. *In segmento majori angulus BAC recto minor.*

3. *In segmento vero minori angulus BEC recto major.*



DEMONSTRATIO.

Pars I. Ducta DB, erunt duo triangula DAB. DBC. Isoscelia, adeoque anguli supra bases [a] æquales. a 5. 1.

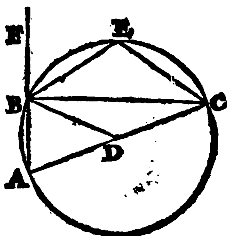
Ergo ang. DBA ∞ DAB. ⎤
Et ang. DBC ∞ DCB. ⎦ A.

Totus Ang. ABC ∞ duobus BAC + BCA.

Atqui in triang. ABC omnes tres anguli sunt ∞ [b] 2 Rectis. b 32. 1.

Ergo

Ergo ab una parte angulus A B C est rectus, & ab altera duo reliqui B A C. B C A etiam æquales uni recto.



Pars 2. Per partem I duo anguli BAC BCA simul constituunt unum rectum: ergo solus B A C est minor recto.

Pars 3. In quadrilatero A B E C.

c 21. III. Duo anguli A ╬ E ∞ [c] 2 Rectis.
Atqui ang. A ⊳ uno recto per partem I.
Ergo ang. E ⊲ uno recto.

SCHOLIUM I.

Si trianguli rectanguli hypotenusa dividatur bifariam, erit punctum bisectionis centrum circuli per tria puncta angularia transeuntis: adeoque examen normæ.

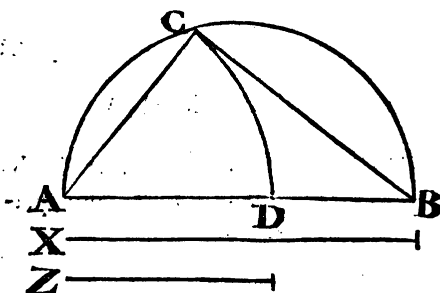
SCHOLIUM II.

Ex hac propositione deducitur sequens

PROBLEMA.

Minus quadratum Z a majore X subtrahere, seu exhibere differentiam quadratorum X & Z.

CONSRUCTIO.



1. Super A B ꝏ X fiat Semicirculus A C B.

2. In Diametro A B ſumatur A D ꝏ Z.

3. Centro A radio A D deſcribe arcum D C. erit recta A C etiam ꝏ Z.

Dico ducta C B illius □ C B eſſe quæſitam differentiam quadratorum AB. AC.

DEMONSTRATIO.

Per propoſ. 31. III. angulus A C B eſt rectus, ergo in triangulo rectangulo A C B eſt

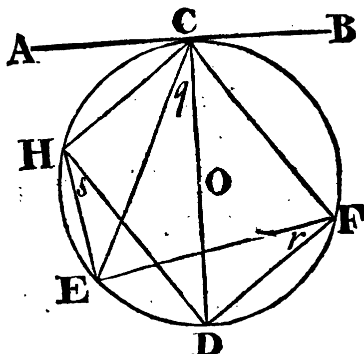
S { □ AB ꝏ □ AC + □ CB per 47. I.
  { □ AC   □ AC,

□ AB − □ AC ꝏ □ CB.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Si recta linea AB circulum tangat in C, & a contactu ducatur alia circulum secans: erit angulus a tangente & secante factus æqualis angulo qui fit in alterno segmento. Theor. 28.



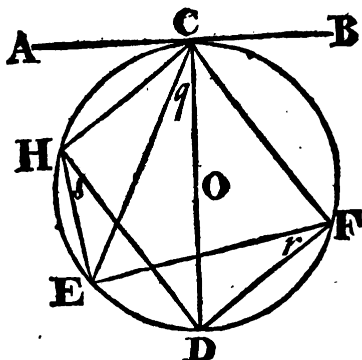
DEMONSTRATIO.

Casus hic obtinent omnino duo:

Aut enim linea circulum secans ad tangentem est perpendicularis & transit per centrum O, ut CD.

Aut non transit: ut CE.

CASUS I.



Demonstrari debet esse angulum ACD ∞ CFD.

Ang. ACD est rectus: per hypoth.

a 31. III. Ut & [a] CFD est rectus: quia est in Semicirculo.

Ergo ang. ACD ∞ CFD.

CASUS II.

Ab una parte probari debet esse ang. ACE ∞ CFE.

b 21. III. S { Ang. ACD ∞ CFD. per casum I.
Ang. Q ∞ [b] R. quia in eodem segmento.

Rema-

Remanet ang. ACE ∞ CFE.

Ab altera parte probari debet ang. BCE ∞ CHE.

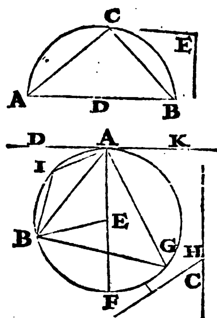
A { Ang. BCD ∞ CHD per casum I.
Ang. Q ∞ S. quia sunt in eodem segmento.

Totus ang. BCE ∞ Toti CHE.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

Probl. 5. *Super data recta A B segmentum circuli construere, quod capiat angulum dato angulo æqualem.*



Est autem angulus datus vel rectus ut E, vel non rectus ut H. C.

CASUS I.

Constructio & Demonstratio.

Data A B bifariam divisa in D. Centro D radio D A fiat semicirculus A C B. hic capit [a] angulum rectum ACB, adeoque dato recto E æqualem.

a 31. III.

CA-

CASUS II.

CONSTRUCTIO.

1. Ad datæ B A punctum A ducatur DK, ut angulus DAB sit æqualis [b] angulo dato C. b 31. I.

2. Ex A duc perpendicularem A F.

3. Fiat angulus A B E æqualis angulo B A E.

4. Centro E, radio E A vel E B (quæ per 6. I. sunt æquales) describe circulum B I A G.

Dico segmentum A G B capere angulum dato acuto C æqualem.

Ut & segmentum A I B capere angulum data obtuso H æqualem.

Pars 1. Ang. D A B ∞ [c] A G B, in alterno segmento. c 32. III.

Et Ang. D A B ∞ C per construct.

Ergo Ang. A G B ∞ C,

Pars 2. In quadrilatero A I B G.

Duo anguli I + G [d] ∞ 2 Rectis. d 22. III.

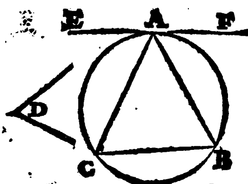
Et duo anguli H + C ∞ 2 Rectis.

S { Ergo I + G ∞ H + C.
Atqui G ∞ [e] C. per partem I. e 32. III.

Ergo I ∞ H. Q. D. E.

PROPOSITIO XXXIV.

Probl. 6. *A dato circulo ABC segmentum CBA auferre, capiens angulum B, dato angulo D æqualem.*



CONSRUCTIO.

1. Ducatur recta tangens Circulum in A.
2. Ad A fiat angulus EAC æqualis angulo dato D.

Dico segmentum ABC capere angulum ABC æqualem D.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Ang. EAC ∞ ª ABC in alterno segmento. ª31. III.

Atqui EAC ∞ D per constructionem.

Ergo ABC ∞ D.

Q. E. D.

Alia CONSTRUCTIO.

1. Ex quolibet puncto B. ducatur recta BC.
2. Ad B fiat angulus CBA ∞ D. ª

Dico, ducta AC, segmentum ABC capere angulum æqualem D.

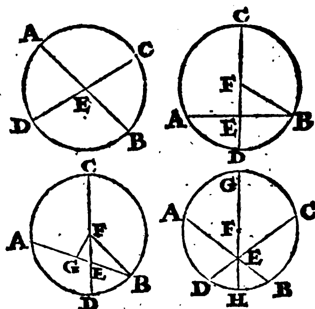
DEMONSTRATIO.

Hæc per se satis est manifesta.

PROPOSITIO XXXV.

Theor. 29.

Si in circulo duæ rectæ AB. CD se mutuo in E secuerint: Rectangulum comprehensum sub segmentis unius AE. EB: æquale est ei quod sub segmentis alterius CE. ED. comprehenditur rectangulo.



Quatuor diversi hic occurrere possunt casus.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

Si rectæ A B. C D se mutuo secent in Centro: tum ▭ A E B erit ꝏ ▭ C E D: quia quatuor illorum latera sunt radii, adeoque inter se æqualia.

CASUS II.

Si una C D per centrum F ducta alteram A B non per centrum transeuntem secet bifariam adeoque [a] perpendiculariter in E: ducatur F B. [a] 3. III.

DEMONSTRATIO.

▭ CED + □ FE [b] ꝏ □ FD seu □ FB. [b] 5. III.
Atqui □ FE + □ EB ꝏ □ FB.

Ergo illis in hujus locum positis

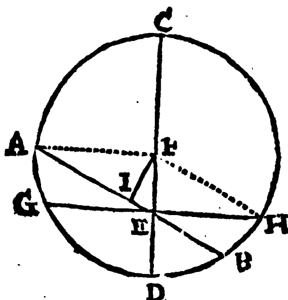
▭ CED + □ FE ꝏ □ FE + □ EB.
Adeoque dempto utrinque eodem □ FE.

▭ CED ꝏ □ EB hoc est ▭ AEB.

CA-

CASUS III.

Si recta CD per centrum F ducta alteram A B non per centrum ductum non dividat bifariam in E.



DEMONSTRATIO.

Ductis perpendicularibus GH. FI, ut & radiis FA. FH, erit

□ FA ꝏ □ FH.

Hoc est per 47. I.

□ AI + □ IF ꝏ □ FE + □ EH.

Hoc est. 5. II.

▭ AEB + □ IE.

Atqui □ IF + □ IE ꝏ □ FE.

Quibus ablatis a superioribus, remanet,

▭ AEB ꝏ □ EH ꝏ (per Casum II.)

▭ CED. Q. E. D.

CA-

CASUS IV.

Si neutra transeat per centrum & se mutuo secent utcunque.

DEMONSTRATIO.

Ducatur GH. transiens per centrum F & per intersectionis punctum E. Tum.

▭ AEB ꝏ ▭ GEH } per ca-
Et ▭ CED ꝏ eidem ▭ GEH } sum 3.

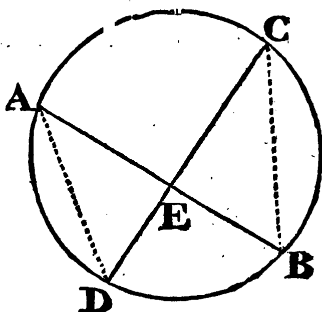
Ergo ▭ AEB ꝏ ▭ CED.
Q. E. D.

NOTA.

In casu 3. Illa quæ sibi invicem subscribuntur inter se sunt æqualia & inferiora loco superiorum legi debent, ac si in una eadem linea essent substituta; id quod etiam in plerisque aliis demonstrationibus observandum.

SCHO-

SCHOLIUM.



Suppositis Libri V. Definitione I. & Prop. 4. & 16. (quæ cum hac propositione nihil habent commune) hæc unica demonstratio facillime omnibus casibus inservire potest.

DEMONSTRATIO.

Ductis AD. CB, erit in triangulis AED. CEB.

Angulus A ꝏ C ⎤
Ang. D ꝏ B ⎦ 21. III.
Ang. AED ꝏ CEB. 15. I.

Ergo erit per 4. VI.

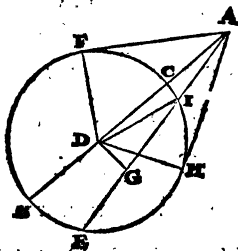
AE — ED ∷ CE / EB.

Et per nostrum Theor. I. Lib. V. vel 16. VI.

▭ AE. EB ꝏ ▭ CE. ED. Q. D. E.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.



Si a puncto A extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens AF, altera secans AB. Erit rectangulum BAC, sub tota secante BA & illius parte AC inter punctum A & circulum interjecta comprehensum, æquale quadrato tangentis AE. Theor. 30.

Duo hic notandi sunt casus.

CASUS I.

Aut secans AB transit per centrum D.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Ducta DF, erit

a 6. II.

S ▭ BAC + □ DC = □ DA.

□ DF + □ FA 47. I.

Atqui □ DC = □ DF. Quia sunt a radiis.

▭ BAC = □ FA.

Casus II.

Aut secans AE non transit per centrum.

DEMONSTRATIO.

Ex centro D ducta perpendiculari DG ut & DI: erit

▭ EAI + □ GI = □ GA
□ DG □ DG] A.

▭ EAI + □ DG + □ GI = □ DG + □ GA.

47. I. □ DI seu □ DF □ DA. 47. I.

Hoc est □ FD + □ FA. 47. I.

▭ EAI + □ DF = □ DF + □ FA.

Sublato utrinque □ DF.

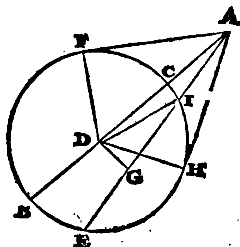
▭ EAI = □ FA.

Q. E. D.

COROL-

COROLLARIUM I.

Si a puncto quovis extra Circulum sumto A, plures rectæ ACB. AIE circulum secantes ducantur, Rectangula BAC. EAI, comprehensa sub totis secantibus AB. AE & partibus exterioribus AC. AI, inter se sunt æqualia.



DEMONSTRATIO.

Ducta Tangente A F.

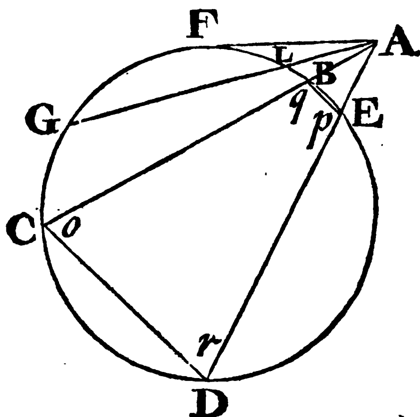
▭ BAC ∞ □ AF.
Atqui etiam
▭ EAI ∞ eidem □ AF } a. — a 36. III.

Ergo per Axioma I.

▭ BAC ∞ ▭ EAI.

Q. E. D.

SCHOLIUM I.



Suppositis iisdem quæ in Scholio præcedenti, hanc damus Corollarii primi demonstrationem.

Demonstrandum est ∠ CAB esse æquale ∠ DAE.

DEMONSTRATIO.

Ductis CD & BE, erunt triangula CAD. EAB inter se similia.

Nam anguli O + P ꝏ 2 Rectis 22, III.
Et anguli AEB + P ꝏ 2 Rectis 13, I.

Ergo O + P ꝏ AEB + P,

Et

Et Sublato communi angulo P,
O ∞ AEB.
Deinde ang. A utrinque est communis,
Ergo R ∞ ABE, 32, 1.
Quare in triang. CAD. EAB erit per 4, VI.
CA — AD ∷ EA / AB,
Et per 16, VI.
▭ CA AB ∞ ▭ DA / AE,
Q. E. D.

SCHOLIUM II.

Si jam ex puncto A supra lineam AC ducatur ALG, eodem modo ductis GD LE probatur esse ▭ GAL ∞ ▭ DAE; notandumque est puncta peripheriæ G. L. concavæ & convexa propius ad se invicem accedere, quam puncta C & B; quæ punctorum distantia adhuc magis imminuiter si ex A supra lineam AG ducatur alia Circulum secans: donec tandem ducatur recta AF, quæ Circulum tangit in unico puncto F, in quo puncta peripheriæ concavæ & convexæ coincidunt, adeoque cum antea designatæ essent duæ lineæ AB AC seu AL AG. inter se inæquales; jam ex A ducitur solummodo unica linea AF. quæ ergo in superiori proportione bis sumenda

menda est sc: semel pro linea GA, & semel pro LA. quo facto proportio sic stabit FA — AD = EA / AF.

Ergo per 16. VI.

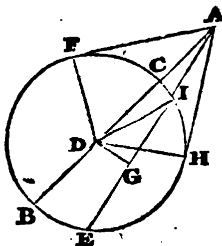
□ Tangentis AF ∞ = DA. AD.

Quæ æqualitas ipsius Propositionis 36 genuinum exhibet sensum, ut hinc pateat quam arcto nexu hæ veritates inter se cohæreant, quamque naturali una ex alia deducatur consequentiâ.

CO-

COROLLARIUM II.

Duæ rectæ AF. AH. ab eodem puncto A ductæ, quæ circulum tangunt, inter se sunt æquales.



DEMONSTRATIO.

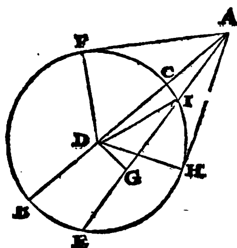
Ducta linea ACB, quæ Circulum secet

□ AF ∞ ▭ BCA] a
□ AH ∞ eidem ▭ BCA]   a 37. III.

Ergo □ AF ∞ □ AH.
Adeoque etiam
AF ∞ AH.

COROLLARIUM III.

Ab eodem puncto A extra Circulum sumto duci tantum possunt duæ rectæ A F. A H, quæ Circulum tangunt.



DEMONSTRATIO.

Ducta ex A recta A C B quæ per centrum transit, omnes rectæ, quæ intra A F, A H circulum tangentes ducuntur, sunt [b] minores ipsis A F. A H; ergo omnia illorum quadrata sunt minora
b 8, III.
c 36, III. ⊏ B A C: Ergo [c] nulla ex ipsis circulum tangit: Adeoque duæ istæ AF. AH circulum tantum tangunt.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

Si a puncto A extra circulum posito ductæ sint duæ rectæ A B. A F, ita ut rectangulum B A C sit æquale quadrato alterius AF tum linea AF circulum tangit in F.

DEMONSTRATIO.

Ducta linea tangente A H, ut & lineis
DF. DH.
▭ B A C [a] ꝏ □ A H. a 36. III.
Atqui ▭ B A C ꝏ □ A F. per proposit.

Ergo □ AH ꝏ □ AF. Ergo AH ꝏ AF.

Quare in Triangulis AFD. AHD.
Latus AF ∞ AH.
Latus FD ∞ HD.
Latus DA commune.

---

b 8. I. Ergo Ang. AFD ∞ AHD. [b]
c 18. III. Atqui [c] AHD est rectus.

---

d 16. III. Ergo AFD rectus est adeoque [d] AF tangens.

Q. E. D.

FINIS LIBRI TERTII.

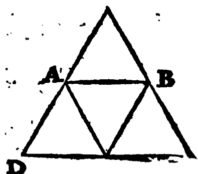
EUCLI-

EUCLIDIS ELEMENTORUM

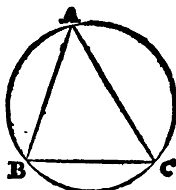
LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

1. *Figura rectilinea, in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli, singula latera ejus cui inscribitur, tangunt.*

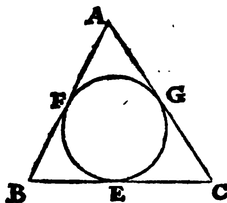


2. *Similiter & figura circum figuram describi dicitur, cum singula ejus, quæ circumscribitur, latera singulos ejus figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.*



3. *Figura autem rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.*

4. *Circulus autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria, singulos tangit ejus figuræ, quam circumscribit, angulos.*

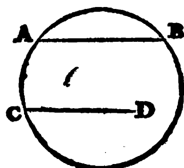


5. Figu-

5. Figura vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera ejus, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

6. Similiter & circulus in figura inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ in qua inscribitur.

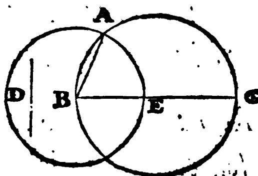
7. Recta in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.



Sic A B. dicitur in circulo accommodata, non vero C D.

PROPOSITIO I.

Probl. 1. *In dato circulo ABC accommodare rectam BA æqualem datæ rectæ D: quæ Circuli diametro BC non sit major.*



CONSTRUCTIO.

1. In dato circulo duc diametrum BC; cui si data recta D sit æqualis, petito satisfactum erit. Si vero minor.

a 3. 1. 2. Abscinde [a] BE ∞ D: & centro B radio BE describe arcum circuli EA.

Dico rectam BA esse æqualem D & coaptatam in Circulo.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

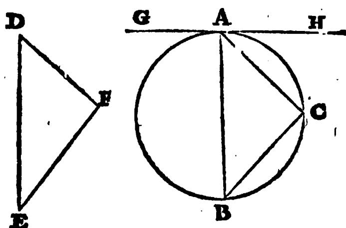
Linea D ∞ B E per constructionem.
E A ∞ B E quia radii.

Ergo linea D [b] ∞ B A, quæ est co- [b] Ax. I.
aptata in circulo, quia [c] utraque extremitas [c] Def. 7. IV.
terminatur in peripheria.

PRO-

PROPOSITIO II.

Probl. 2. *In dato circulo ABC triangulum ABC describere, quod dato triangulo DEF sit æquiangulum.*



CONSTRUCTIO.

a 17. III. b 23. I. 1. Ad [a] ductæ tangentis GH punctum A [b] constituatur angulus GAB. æqualis angulo F.

2. Ad idem punctum A ab altera parte fiat HAC æqualis angulo E.

Jungatur recta BC.

Dico triangulum ABC ipsi DEF esse æquiangulum.

DEMON.

DEMONSTRATIO.

In triangulis ACB. DEF.

A { Ang. C [c] ∞ GAB ∞ F per construct.
  { Ang. B [c] ∞ HAC ∞ E per construct. [c 32. III.]

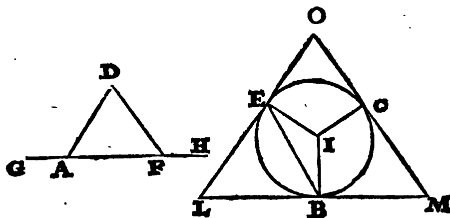
Duo angulo C ╬ B ∞ duobus F ╬ E.

Ergo etiam tertius [d] A ∞ tertio D. [d 2 Cor. Sch. 13. I.]

PRO-

PROPOSITIO III.

Probl. 3. *Circa datum circulum BCE triangulum LMO describere æquiangulum dato triangulo AFD.*



CONSTRUCTIO.

1. Trianguli DAF latus AE producatur in G & H.

a23. I. 2. In circulo ducto radio IB, [a] fiat angulus BIE. æqualis trianguli externo angulo DAG.

3. Fiat angulus BIC æqualis externo DFH.

b16. & 17. III. 4. Ad tria puncta B. C. E. ducantur tres [b] tangentes OL. OE. LM.

Dico ex illarum concursu oriri triangulum OLM. dato DAF æquiangulum.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Ex Scholio Prop. 13. I. quadrilaterum BIEL dividi poteſt in duo triangula, cum autem unum triangulum contineat duos angulos rectos, duo continebunt quatuor; adeoque quatuor anguli in quadrilatero dicto erunt æquales quatuor rectis: a quibus ſi demantur duo [c] recti LEI. LBI. remanebunt. c 16. III.

Anguli BIE + L = 2 Rectis.
Atqui DAG + DAF = 2 Rectis.

Ergo BIE + L = DAG + DAF } S
Atqui BIE = DAG per conſt. }

Remanet L = DAF.

Eodem modo demonſtratur quod ſit angulus M = DFA, ergo tertius O erit = [d] tertio D. d 2 Cor. Sch. 32. I.

NOTA.

Quod autem tangentes EL & BL in puncto K concurrere debeant ſic patet. Ducta BE.

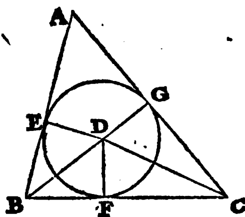
Duo anguli toti LBI. LEI. = 2 R.
Ergo ang. partiales LEB. LBE > 2 R.

---

[e] Ergo rectæ EL. BL concurrent. e Ax. 11.

PROPOSITIO IV.

Probl. 4. *Dato triangulo ABC circulum inscribere.*



CONSTRUCTIO.

9. 1. 1. Duos quoslibet angulos B. C. a divide bifariam per rectas BD. CD.

2. Ex puncto concursus D duc perpendiculares DE. DF. DG.

3. Centro D, radio DE. describe circulum.

Dico illum tangere omnia latera trianguli in punctis D. E. F. adeoque ipsi inscriptum esse.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

In triangulis DGC. DFC.
Ang. G ∞ F. per construct.
Ang. DCG ∞ DCF. quia totus C bisectus est.
Latus DC commune.

Ergo latus DG [b] ∞ DF. b 26. I.

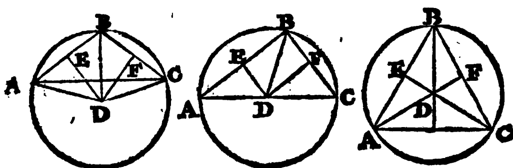
Eodem modo demonstratur esse DF ∞ DE.

Adeoque tres lineæ DE. DF. DG sunt inter se æquales.

Ergo circulus centro D ductus transit per puncta E. F. G. & tangit [c] omnia latera; quia anguli ad E. F. G. sunt recti; adeoque [d] triangulo inscriptus est. c 16. III. d Def. 6.

PROPOSITIO V.

Probl. 5. *Circa datum triangulum ABC circulum describere.*



CONSTRUCTIO.

1. Quælibetcunque duo latera AB.
a 10. 1. BC [a] divide bifariam in E. & F.
b 11. 1. 2. Ex E & F erige [b] perpendiculares ED. FD.

3. Ex puncto concursus, describe radio DA circulum.

Dico illum quoque transire per puncta B, C. adeoque triangulo circumscriptum esse.

DEMONSTRATIO.

Ductis DA DB DC. In triangulis DEA. DEB.

Latus DE commune.
Latus EA ∞ EB ⎤ Per con-
Angulus DEA ∞ DEB ⎦ struct.

Ergo [c] basis DA ∞ DB. c 4. I.

Eodem modo demonstratur esse DB ∞ DC, adeoque tres lineæ DA. DB. DC sunt inter se æquales.

Ergo Circulus centrò D, radio DA descriptus, transit per omnia trianguli puncta angularia: adeoque ipsi est circumscriptus. [d] d Def. 4. IV.

Eadem constructionis formula obtinet in omnibus trianguli speciebus; cum hac solummodo differentia, quod in Rectangulo centrum cadat in punctum medium hypotenusæ.

In Acutangulo centrum cadat intra triangulum.

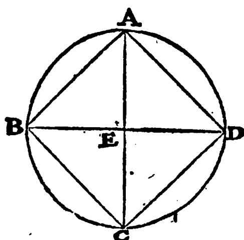
In obtusangulo vero extra.

SCHOLIUM.

Ex hac propositione deducitur Methodus describendi circulum, per tria puncta non in linea recta disposita, transeuntem.

PROPOSITIO VI.

Probl. 6. *Dato Circulo quadratum inscribere.*



CONSTUCTIO.

1. Ducantur duæ Diametri A C. B D in centro E ſe ad angulos rectos interſecantes.

2. Jungantur rectæ A B. B D. C D. D A.

Dico A B C D eſſe quadratum quæſitum.

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

In triangulis A E B. A E D.

Latus

Latus A E utrique commune.
Latus E B ∞ E D. quia radii.
Angulus A E B ∞ A E D. quia uterque rectus.

Ergo basis A B [a] ∞ A D. [a] 4. I.

Eodem modo probatur A D ∞ D C: D C ∞ C B. C B ∞ B A.

Adeoque quatuor illa latera inter se erunt æqualia.

Pro angulis.

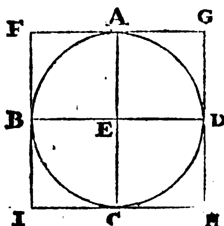
Quatuor anguli A. B. C. D. istis lateribus contenti, sunt in Semicirculo. ergo recti. [b] [b] 31. III.

Adeoque A B C D est quadratum circulo inscriptum.

Q. E. F.

PROPOSITIO VII.

Probl. 7. *Circa datum Circulum quadratum deſcribere.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur duæ diametri A C. B D. ſe mutuo ad angulos rectos in E ſecantes.

2. Per illarum extremitates ducantur tangentes F G. G H. H I. I F.

Dico illas coeuntes conſtituere Quadratum quæſitum F G H I.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Pro angulis.

In quadrilatero A E B F.

4. Anguli A. E. B. F. ꝏ [a] 4 Rectis } S
Atqui 3 Ang. A. E. B ꝏ 3 Rectis }

a Schol. 13. I.

Remanet ang. F ꝏ 1 Recto.

Simili ratiocinio probatur angulos G. H. I esse rectos.

Pro lateribus.

In parallelogrammis F D. I D. latera F G. I H sunt æqualia Diametro B D. adeoque & inter se.

In parallelogrammis I A. H A. latera F I. G H sunt [b] æqualia Diametro A C. b 34. I.

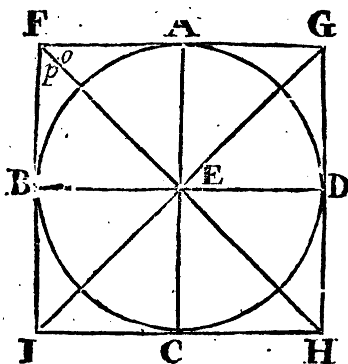
Atqui Diametri A C. B D sunt inter se æquales.

Ergo 4 latera F G. G H. H I. I F sunt inter se æqualia.

Adeoque F G H I est quadratum quæsitum. Q. F. E.

PROPOSITIO VIII.

Probl. 8. *In dato quadrato Circulum describere.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur duæ diagonales FH. GI se intersecantes in E.
2. Ex E demittatur ad latus FI perpendicularis EB.
3. Centro E radio EB, describatur Circulus.

Dico illum tangere latera in punctis A. B. C. D. adeoque quadrato inscriptum esse.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Ex E. ductis perpendiculatibus E A. E D. E C.

In triangulis F A E. F B E. erunt.

Angulus A ∞ B per conſtr. quia recti.
Angulus [a] O ∞ P. quia ſemirecti. a 2 Cor. Sch. 32. I.
Latus F E utrique commune.

Ergo Latus E A ∞ E B. [b] b 26. I.

Sic etiam probatur E B ∞ E C: & E C ∞ E D: ut & E D ∞ E A.

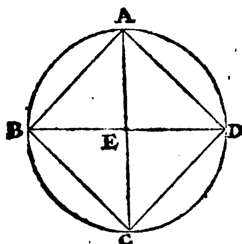
Ergo circulus centro E, radio E B deſcriptus tranſibit per puncta A. D. C: & quia anguli ad illa puncta ſunt recti, tanget omnia intera; adeoque circulus quadrato erit inſcriptus.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Probl. 9. *Circa datum quadratum circulum describere.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur diametri A C. B D secantes sese in puncto E.
2. Centro E, radio E B, describatur Circulus.

Dico illum transire per omnia quadrati puncta angularia; adeoque illi esse circumscriptum.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Diametri A C. B D, quatuor angulos A. B. C. D. [a] bifariam secant, Ergo in triangulo E B A. d 2 Cor. Sch. 13. 1.

Angulus E B A ∞ E A B.

Ergo latus E A [b] ∞ E B. b 6. 1.

Sic etiam probatur E B ∞ E C. & E C ∞ E D: & E D ∞ E A.

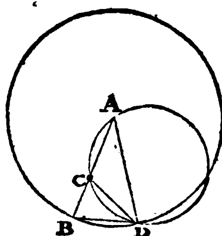
Adeoque quatuor lineæ E A. E B. E C. E D. sunt se æquales.

Ergo circulus centro E radio E B descriptus transit per omnia quadrati puncta angularia A. B. C. D. adeoque illi circumscriptus est.

Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Probl. 10. *Triangulum Isosceles ABD construere, cujus singuli ad basin anguli B. & D dupli sint reliqui ad verticem A.*



CONSTRUCTIO.

1. Quamlibetcunque lineam AB ita
a 11. II. divide [a] in C, ut ▭ ABC sit ∞ □ A'C.
2. Centro A radio AB describe circulum.
3. Ex B in isto circulo accommoda
b 1. IV. [b] rectam BD ∞ AC.
4. Duc rectam AD.

Dico ABD esse triangulum quæsitum.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Ducta recta CD, circa triangulum ACD describatur circulus ACD.
▭ ABC ∞ □ AC hoc est □ BD per construct.

Ergo BD tangit circulum [c]: quem BA, secat. c 37. III.

A [Unde ang. BDC [c] ∞ A in alterno seg. c 32. III.
Ang. CDA CDA.

Totalis ang. ADB (∞ ABD) ∞ A + CDA.
Atqui etiam BCD [d] ∞ A + CDA. d 32. I.

Ergo
In triangulo BCD ang. BCD ∞ CBD.
Adeoque latus BD [e] ∞ CD. e 6. I.
Atqui latus BD ∞ AC.

Ergo
In triangulo ACD latus CD ∞ CA.
Adeoque angulus A ∞ CDA.

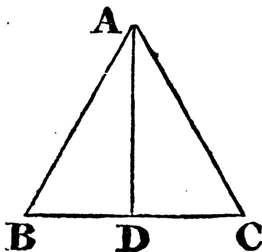
Ergo angulus BCD (qui duobus A & CDA est æqualis probatus) est duplus anguli A.
Ergo etiam BDA, qui angulo CBD demon-

demonſtratus eſt æqualis, duplus erit anguli A.

f 5. 1. Adeoque & ADB, qui angulo [f] ABD eſt æqualis, ejuſdem anguli A duplus erit. Q. E. F.

COROLLARIUM.

In Triangulo Iſoſcele ABC hoc modo conſtructo, Angulus B vel C ad baſin valet $\frac{2}{5}$ duorum rectorum vel $\frac{4}{5}$ unius recti: Quare angulus A valebit $\frac{1}{5}$ duorum rectorum, vel $\frac{2}{5}$ unius Recti.



DEMON-

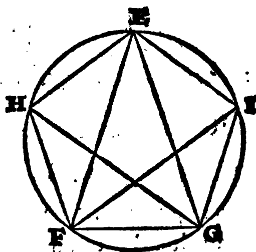
DEMONSTRATIO.

Trianguli A B C tres anguli A. B. C. simul valent duos rectos; seu $\frac{5}{5}$ duorum rectorum: Ergo cum singuli ad basin B & C sint dupli ipsius A, valebit B vel C seorsim sumtus $\frac{2}{5}$ duorum rectorum: adeoque angulus A erit $\frac{1}{5}$ duorum Rectorum.

Deinde bisecto angulo A per rectam A D, quæ erit perpendicularis ad basin B C: Erit angnlus B, quadruplus anguli B A D: Jam in triangulo B A D, propter angulum rectum D, duo anguli A & B simul faciunt unum angulum rectum seu $\frac{5}{5}$ unius recti: Adeoque erit B æqualis $\frac{4}{5}$ unius recti: Et B A D, qui est semissis totius A ∞ $\frac{1}{5}$ unius recti. Unde sequitur totum A valere $\frac{2}{5}$ unius Recti.

PROPOSITIO XI.

Probl. 11. *Dato circulo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.*



CONSTRUCTIO.

1. Cuilibetcunque triangulo Isoſceli juxta præcedentem propoſitionem conſtituto, æquiangulum [a] inſcribatur EFG in circulo dato.

a 2. IV.

2. Illius ſupra baſin anguli EFG. EGF biſecentur per rectas FI. GH.

3. Puncta E. H. F. G. I. jungantur totidem rectis.

Dico factum eſſe quod petitur.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Quinque anguli EFI. IFG. EGH. HGF. FEG sunt inter se æquales per constructionem.

Ergo [a] arcus quibus insistunt sunt æquales. a 26. III.

Ergo illis [b] subtensæ rectæ, quæ sunt Pentagoni latera, sunt æquales. b 29. III.

Pro angulis.

Arcus HFGI ∞ Arcui FGIE. per partem I.

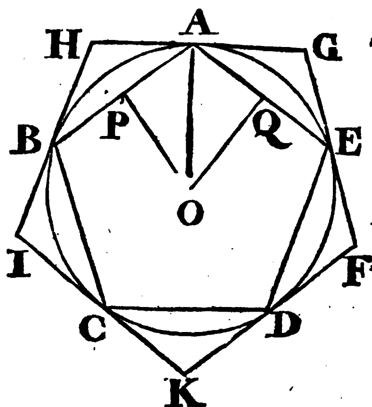
Ergo Angulus E [c] ∞ Angulo H. quia æqualibus arcubus insistunt.

Simili modo de duobus aliis angulis &c. Q.E.F.

PROPOSITIO XII.

Probl. 12.

Circa datum circulum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.



CONSTRUCTIO.

1. Inſcribatur Pentagonum regulare per præced: ABCDE.

2. Ad puncta A. B. C. D. E. ducantur totidem tangentes, quæ concurrent in punctis F. G. H. I. C.

Dico factum quod quæritur.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Ex centro O ductis perpendicularibus O P. O Q, ut & radio O A in triangulis O A P. O A Q.

Latus O P [a] ∞ O Q. quia æquales A B. A E æquidistant a centro. [a] 14. III.

Latus P A [b] ∞ Q A. quia æquales A B. A C bisectæ sunt. [b] 3. III.

Latus O A utrique commune.

Ergo ang. [c] OAP ∞ OAQ. Qui si auferantur ab æqualibus Rectis angulis OAH OAG : remanebit angulus HAB ∞ GAE. [c] 8. I.

Deinde Triangula BHA. EGA. sunt Isoscelia, quia ex puncto H ductæ sunt ductæ tangentes HA. AB: ut ex puncto G duæ GA. GE: quæ sunt [d] æquales: [d] 2 Coroll. 36. III.

Quare illa triangula habent bases AB. AE æquales, & angulos ad basin HBA. HAB. æquales GAE. GEA. non solum alterum alteri, sed promiscue omnes quatuor inter se æquales. Adeoque [e] quatuor latera BH. HA. AG. GE. sunt inter se æqualia. [e] 5. & 26. I.

Simili modo demonstratur omnes decem lineolas esse inter se æquales.

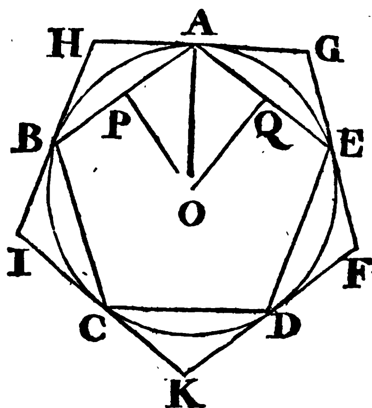
Si jam una sit æqualis uni etiam duæ erunt duabus æquales.

Adeoque quinque latera, quæ ex duabus lineolis constant, erunt æqualia.

Pro angulis.

Ex demonstratis patet triangula AHB AGE habere omnia latera æqualia. Adeoque angulum H [f] ∞ G. Et eodem modo de reliquis.

f 8.1.



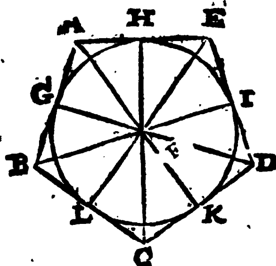
SCHOLIUM.

Si in circulo quælibetcuuque figura regularis fuerint inscripta, lineæ tangentes circulum in punctis illius angularibus, suo concursu semper constituent figuram similem circulo circumscriptam.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Dato Pentagono regulari circulum inscribere. Probl. 13.



CONSTRUCTIO.

1. Quoslibet duos angulos A & E divide bifariam per rectas AF. EF.

2. Ex illarum puncto concursus F, ducantur ad omnia latera perpendiculares.

3. Ex F tanquam centro pro radio assumta una ex istis perpendicularibus describatur circulus.

Dico illum Pentagono fore inscriptum.

 DEMON-

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AGF. AHF.

Angulus GAF ∞ HAF ⎤ Per con-
Angulus AGF ∞ AHF ⎦ struct.
Latus AF utrique commune.

a 16. I. Ergo [a] latus GF ∞ HF.

Eodem modo probatur HF ∞ IF. IF ∞ KF. KF ∞ LF & denique LF ∞ GF.

Adeoque omnes istæ perpendiculares erunt inter se æquales.

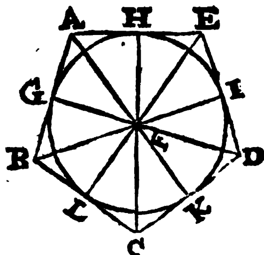
Quare circulus radio FH descriptus transibit quoque per puncta I. K. L. G.
b 16. III. in quibus ista latera tanget; quia anguli ad ista puncta sunt recti.

Q. E. D.

COROL-

COROLLARIUM I.

In omni Polygono Regulari ABCDE. omnes lineæ AF. BF. CF. DF. EF. ejus angulos A.B.C.D.E. bisecantes in uno eodemque puncto F convenient.



DEMONSTRATIO.

Duæ lineæ A F. B F bisecantes angulos A & B. conveniunt in F: si jam ex C ducatur aliqua linea angulum C dividens bifariam, illa etiam cum ipsis A F. BF in F concurret. Nam cum anguli FBC. F C B sint æquales, etiam istæ bisecan-

tes lineæ debent esse æquales; Adeoque ista linea ex C ducta debet etiam cadere in idem punctum F. quia reliquæ ex C ad perpendicularem FL ductæ supra aut infra F caderent, adeoque ipsa CF aut majores aut minores essent; prætérquam quod istæ angulum C non secarent bifariam: Eodem modo probabitur lineas DF, EF concurrere debere in eodem puncto F. Ergo:

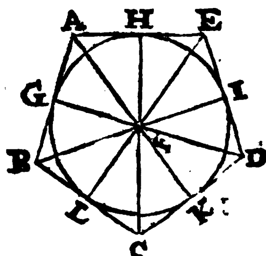
Q. E. D.

COROLLARIUM II.

In omni Polygono Regulari ABCDE imparem laterum habente numerum linea CF, aliquem ex angulis, ut C bisecans, si producatur ad latus oppositum AE, illud etiam secabit bifariam in H.

DEMON-

DEMONSTRATIO.



a 32. I.

3. Ang. CFB. BFA. AFH ∞ 3. CFD DFE. EFH.
Atqui CFB. BFA ∞ CFD. DFE.

Remanet AFH ∞ EFH.

Quare in Triangulis AFH. EFH.
Latus AF ∞ EF.
HF commune
Angulus AFH ∞ EFH.

Ergo per 4. I.
AH. ∞ EH. Q. E. D.

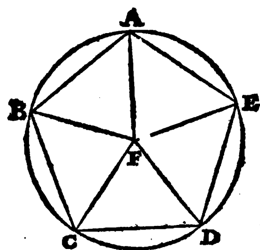
SCHOLIUM.

Eadem methodo in quacunque figura regulari circulus describi poteſt.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Probl. 14. *Circa datum Pentagonum regulare circulum deſcribere.*



CONSTRUCTIO.

1. Duos quoslibet angulos A & B divide bifariam per rectas A F. B F, quæ concurrent in F. (a Ax. 11.)

2. Centro F, radio F A, vel F B deſcribe circulum.

Dico illum tranſiturum per reliqua puncta angularia.

DE-

DEMONSTRATIO.

In triangulo F A B.

Ang. F A B ∞ F B A. quia illorum dupli sunt æquales.

Ergo latus F A ∞ F B. a a 6. 1.

Eodem modo bisecto angulo C demonstrabitur F B ∞ F C. & sic per orbem omnes lineæ bisecantes angulos erunt æquales.

Ergo circulus transibit per omnia puncta angularia, adeoque pentagono circumscriptus erit.

Q. F. E.

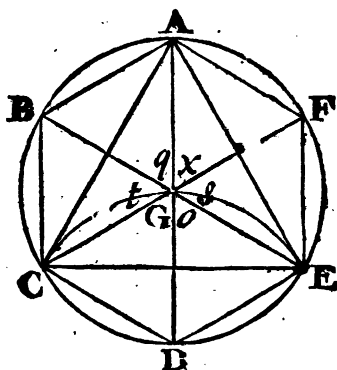
SCHOLIUM

Eadem constructionis forma circa quamlibet figuram regularem circulum describere licet.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Probl. 15. *In dato circulo Hexagonum regulare describere.*



CONSTRUCTIO.

1. Centro quolibet puncto D, radio circuli DG, describe arcum CGE.

2. Ex punctis C. D. E. per centrum G describe tres diametros CF. DA. EB.

3. Duc sex rectas AB. BC. CD. DE. EF. FA.

Dico ABCDEF esse hexagonum quæsitum.

DE-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Lineæ D C. D E singulæ sunt æ, Radio D G.
Lineæ G C. G E. G D singuli sunt Radii.

Ergo quinque lineæ G C. G D. G E. D C. D E sunt æquales.
Adeoque Triangula G C D. G D E sunt æquilatera.

Ergo duo anguli G & O singuli sunt a una tertia pars duorum rectorum. a 3 Cor. 32. 1.
Atqui tres anguli G. O. S. simul b valent duos rectos, seu tres tertias duorum rectorum. b 13. 1.

Ergo tertius S. etiam est una tertia duorum rectorum.

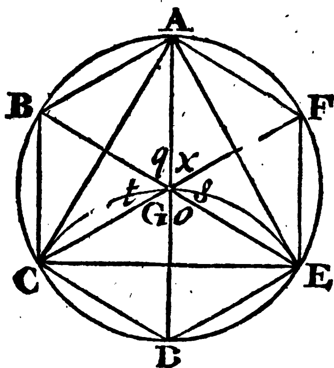
Adeoque tres G. O. S. sunt inter se æquales.
Atqui illis æquales sunt tres c oppositi X. Q. T. c 15. 1.

Ergo sex anguli ad Centrum sunt æquales.

Ergo

d 26. III. Ergo [d] ſex arcus, quibus inſiſtunt, ſunt æquales.

e 29. III. Adeoque [e] ſex ſubtenſæ, quæ conſtituunt latera figuræ, inter ſe ſunt æquales.



Pro angulis.

Hos eſſe æquales facile patet, quia f 21. III. f ſinguli inſiſtunt æqualibus arcubus, ſc. quatuor ſextis partibus totius peripheriæ; Ergo ſunt inter ſe æquales.

COROL.

COROLLARIUM.

Latus Hexagoni Regularis ABCDEF circulo inscripti, æquale est Radio circuli.

DEMONSTRATIO.

Ex constructione patet in Triangulo DCG. latus DC esse æquale lateri DG; Atqui DC est latus Hexagoni, & DG est Radius Circuli: Ergo.

SCHOLIUM.

Ductis tribus rectis AC. AE. CE. Circulo inscriptum erit Triangulum æquilaterum ACE.

DEMONSTRATIO.

Ex demonstratione propositionis 15. patet 6 arcus AB. BC. CD. DE. EF. FA esse æquales; ergo binis ac binis conjunctis erunt 3 arcus AC. CE. EA æquales; Adeoque per 29. III. tres rectæ AC. CE. EA erunt æquales; unde jam sequitur triangulum ACE esse æquilaterum.

PROPOSITIO XVI.

Probl. 16. *In dato Circulo Quindecagonum regulare describere.*

CONSTRUCTIO.

a 11. IV. 1. Circulo [a] inscribe pentagonum regulare A E F G H.

b Schol. 15. IV. 2. Itidem [b] triangulum regulare ABC.

Dico rectam B F, fore latus quindecagoni quæsiti.

DEMONSTRATIO.

Pentagonum dividit totam peripheriam in quinque partes æquales; quare quæli-

quælibet continet unam quintam ſeu tres decimas quintas totius peripheriæ: adeoque duæ A E. E F, ſex decimas quantas continebunt.

Triangulum vero dividit totam peripheriam in tres partes æquales; quarum quælibet ut A B continet unam tertiam, ſeu quinque decimas quintas totius peripheriæ. Tum

Arcus AEF ſex decimæ quintæ.
Arcus AEB quinque decimæ quintæ. } S

Arcus BF una decima quinta.

Ergo ſi ducatur recta BF, eique æquales quatuordecim in circulo coaptentur, deſcriptum erit quindecagonum, æquilaterum, cum omnes arcus ſint æquales.

FINIS LIBRI QUARTI.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

1. *Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum metitur majorem.*

Cum totum ſit ſua parte majus, patet partem contineri in ſuo toto. Hoc autem duplici modo fit.

Vel continetur ita ut aliquoties ſumta, præciſe reddat ſuum totum ſeu ipſi æqualis ſit; quemadmodum numerus quatuor ſeu 4, eſt minor toto 12, adeoque in illo continetur, & quidem ita, ut aliquot vicibus, ſcilicet tribus ſumtus, accurate æqualis ſit toti 12. Et inde hæc pars Mathematicis dicitur Aliquota, quæ ſuum totum absque reſiduo dividit, id quod idem eſt ac metiri: & hanc Partis ſpeciem Euclides ſolummodo reſpexit, altera, quæ ſequitur, neglecta.

Vel pars ita continetur in ſuo toto, ut aliquoties ſumta totum vel excedat vel ab

illo

illo deficiat, adeoque non accurate ipsi æqualis sit. Quemadmodnm numerus 4, cum minor sit toto 14, in illo continebitur; sed quia ter sumtus toto minor est ac quater toto major, hæc pars non potest dici Aliquota, nt altera pars notata: quia tamen aliquam exhibet quantitatem totius quantitatis, vocatur pars Aliquanta.

Cæterum cum Enclides adhibuerit Magnitudinis vocabulum, suspicari licet illum meminisse solum quantitatis continuæ, quæ vulgo magnitudinis nomine Mathematicis venit; minime tamen excludenda est quantitas discreta & in numeris posita, quæ suas etiam habet partes: quibus illa omnia, quæ de rationibus & proportionibus toto hoc libro demonstrat, æque facile imo pro captu nostro facilius accommodari possunt.

Quare & nos cum multis aliis omnes hujus libri propositiones, neglectis lineis demonstrabimus in numeris; tum quia illis magis sumus assueti & de illis sæpius quam de lineis cogitavimus; tum etiam quia illa quæ de numeris probantur si cui libet, ipsis lineis applicari possunt.

2. Multiplex autem est major quantitas quam metitur minor.

Quemadmodum pars ſuum totum dividit ſeu metitur abſque reſiduo vel cum reſiduo ; ita reciproce etiam totum a ſua parte dividitur vel ſine vel cum reſiduo. Prius illud totum idem eſt quod multiplex, cujus in hac definitione fit mentio, non intellecto altero. quod cum reſiduo dividitur, quodque adeo multiplex dici non meretur.

3. Ratio eſt duarum quantitatum ejuſdem generis, mutua quadam ſecundum communem menſuram habitudo.

Cum propie loquendo una eademque res ad ſe ipſam non poſſit comparari ſecundum quantitatem, quia ſe ipſa non eſt major nec minor, patet plures requiri inter quas legitima inſtituatur comparatio; quæ etiam tantum poſſunt eſſe duæ. Illæ autem neceſſario requiritur ut ſint res homogeneæ; aut quantitates ejuſdem generis; quales ſunt linea cum linea com-

comparata; superficies cum superficie; corpus cum corpore: nullo ergo modo linea comparari potest cum superficie vel cum corpore, nec superficies cum corpore, quia non sunt ejusdem generis.

Porro ulteriorem hujus homogeneitatis explicationem tradit Euclides in definitione 5.

Hæc autem intelligenda est in quantitatibus secundum magnitudinem, seu partium æqualium numerum, adeo ut una res altera sit vel major vel minor; hoc est ut una res plures vel pauciores similes seu æquales contineat partes quam altera.

Ex quibus patet rationem nihil aliud esse quam modum seu formulam continendi, qua una quantitas aliam quantitatem continet, vel in illa continetur; quæ capacitas cum per nullam aliam operationem quam per divisionem innotescat, liquet rationem seu comparationem duarum quantitatum non clarius quam per fractionis formam posse exprimi.

Exempli gratia; ponantur duo numeri 16 & 4. qui saltem aliquam inter se habent rationem, quia numerus 16 major est numero 4, adeoque numerum 4 in

se continet. Ut jam ulterius ista ratio examinetur videndum est quoties 16 continet 4, quod per divisionem innotescit; quia autem facta divisione acquiritur 4 pro quotiente pronuntiamus rationem 16 ad 4, esse quadruplam. hoc est 16 esse quadruplum numeri 4: vel 16 se habere ad 4 ut 4 ad 1: Id quod etiam commode hoc modo exprimitur per fractionem $\frac{16}{4}$, quæ innuit 16 per 4 esse dividendum vel jam supponit divisum.

Si jam sumantur duo alii numeri ex. gr. 8 & 2, & eorum rationem examinando comperiatur numerum 8 minorem 2 etiam quater in se continere, quia per divisionem idem quotiens 4 obtinetur; quæ per modum fractionis exposita sic stabit $\frac{8}{2}$.

Inde patebit rationem quæ intercedit inter 16 & 4, esse eandem, vel similem vel æqualem rationi quæ est inter 8 & 2: quia numirum 16 toties continet 4, quoties 8 continet 2.

Porro hinc fit manifestum æquimultiplicem esse nihil aliud significare quam habere eandem rationem: ut si dicatur 16 esse æquemultiplicem numeri 4, ac

8 est

8 est numeri 2, idem est ac si dicatur numerum 16 ad 4 habere eandem rationem, quam habet 8 ad numerum 2; cum utriusque sc. & æquemultiplicitas & ejusdem rationis idem quotiens 4 per ejusdem divisionis acquiritur operationem: quare ejusdem rationis notationem hoc modo exprimere licet $\frac{16}{4} \propto \frac{8}{2}$.

Quæ fractiones, ut iterum in aliam rationum formam reducantur, dicimus 16 esse ad 4 quemadmodum 8 est ad 2; vel secundum nostram qua utimur scriptionis methodum 16 ∸ 4 ⩦ 8 / 2.

Duorum autem cujuslibet rationis terminorum ille qui ad alterum refertur Antecedens dicitur; ad quem vero fit relatio, Consequens rationis dicitur. Ut in ratione 16 ad 4 terminus Antecedens est numerus 16; consequens vero 4: quemadmodum ab altera parte, in ratione 4 ad 16, numerus 4 Antecedentis, 16 vero consequentis acquirit nomen.

Rationes autem non uno dividuntur modo: nos duas afferemus præcipuas.

I. Ratio dividitur in rationalem & irrationalem.

Rationalis est quæ veris numeris potest exprimi ut 6 ad 3: quæ est ea-

dem cum 2 ad 1. quæ dicitur dupla.

Irrationalis vero est quæ veris numeris exprimi nequit, ut in quadrato ratio lateris ad Diagonalem; quæ, licet aliquo modo exprimatur per numeros qui Surdi dicuntur, scilicet ut 1 ad $\sqrt{2}$, cum tamen $\sqrt{2}$ non sit verus numerus, sed tantum imaginarii cujusdam numeri nota, veris tamen numeris explicabilis non est.

II. Ratio dividitur in rationem æqualitatis vel inæqualitatis.

Ratio æqualitatis, est quando duo ad se comparata sunt æqualia: ut 4 ad 4: & 2 ad 2.

Inæqualitatis est, cum termini inter se comparati inæquales sint, ut 4 ad 3. & 2 ad 6.

Hæc autem iterum est.

Majoris inæqualitatis, cum terminus antecedens major est consequente: ut 4 ad 3. & 6 ad 2.

Minoris inæqualitatis, cum antecedens est minor suo consequente, ut 2 ad 6 & 4 ad 12.

Proportio est rationum similitudo.

Quem-

Quemadmodum in omni ratione requiruntur duo termini ſeu duæ quantitates, ita in omni proportione requiruntur duæ rationes, cum una eademque ratio ad ſe ipſam proprie comparari nequeat.

Cum ergo duarum rationum una ita ſit conſtituta, ut illius terminus antecedens ſuum conſequentem toties contineat, vel in illo contineatur ſive abſolute & ſine reſiduo ſive cum annexa fractione, quoties alterius antecedens ſuum conſequentem continet vel in illo continetur, vel ſine vel cum fractione quæ præcedenti æqualis eſt, duæ iſtæ rationes conſtituent Proportionem.

Ex: Gr: quia numerorum 12 & 4, Antecedens 12 ſuum conſequentem 4 toties (ſcilicet ter) continet, quoties numerorum 9 & 3, antecedens 9 ſuum conſequentem 3, videlicet etiam ter, duæ iſtæ rationes 12 ad 4 & 9 ad 3 erunt inter ſe ſimiles ſeu æquales ſeu potius eædem ſcilicet triplæ; & hæc ſimilitudo apud Mathematicos vocatur Proportio.

Eſt autem proportio triplex, Arithmetica, Geometrica, & Muſica.

I. Proportio Arithmetica eſt æqualitas exceſſuum vel differentiarum inter tres, qua-

quatuor vel plures numeros; in qua notandum est quemlibet numerum posse recipi pro differentia.

Ut 1. 2. 3. 4. 5. 6. In quibus unitas est differentia.

Vel 1. 3. 5. 7. 9. 11. Qui binario se invicem excedunt.

Vel 1. 4. 7. 10. 13. 16. Qui ternario. Et sic in infinitum.

II. Proportio Geometrica est rationum similitudo inter tres, quantuor vel plures quantitates, seu numeros. Potest autem & hic quilibus numerus pro denominatore rationis assumi excepta unitate.

Ut 1. 2. 4. 8. 16. Qui sunt in ratione dupla adeoque 2 est rationis denominator.

Vel 1. 3. 9. 27. 81. Qui cum sint in ratione tripla numerum 3 pro denominatore habent.

Proportio Musica est qua tres quantitates ita ordinatæ sunt, ut eadem sit ratio primæ ad tertiam, quæ differentiæ inter primam & secundam ad differentiam inter secundam & tertiam. In qua proportione sunt tres numeri 6. 8. 12. cum eadem sit ratio primi numeri 6 ad ter-

tium 12, quæ eſt numeri 2 (exceſſus primi) ad numerum 4. (exceſſum ſecundum.)

5. Rationem habere inter ſe quantitates dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſe mutuo ſuperare.

Hic ulterius explicatur quænam ſint quantitates ejusdem generis, inter quas intercedit ratio, ut ſupra definit 3. vidimus; nim. quarum illa quæ antea erat minor, per multiplicationem ſic poteſt augeri, ut majorem ſuperet.

Unde patet inter illa, in quibus talis multiplicatio nullum habet locum, etiam nullam omnino dari rationem. Sic linea in infinitum multiplicata & ſibi ipſi addita, nunquam fiet major aliqua ſuperficie: cum linea tali multiplicatione non degenerabit in ſuperficiem; adeoque inter lineam & ſuperficiem nulla intercedit ratio: quemadmodum etiam nulla reperitur inter lineam & corpus, nec inter ſuperficiem & corpus; cum qualibetcunque multiplicatione nec linea, nec ſuperficies relictâ ſua ſpecie in corpus muta-

tabitur, adeoque nec ipſo majus evadere poſſit.

Cum autem inter latus quadrati ejusque diagonalem multiplicatio obtineat, certo concludimus illa rationem inter ſe habere : latus enim ita multiplicari & ſibi ipſi addi poteſt ut diagonalem ſuperet ; cum per 20. I. pateat duo latera trianguli majora eſſe tertio latere quod eſt ipſa diagonalis : Hæc autem ratio, ut ſupra notavimus, eſt irrationalis, cum veris numeris illam exprimere non detur.

Præterea rectilinea & curvilinea inter ſe rationem habere poſſunt ; cum inter illa ſit æqualitas & inæqualitas. Lunulæ creſcentis quadraturam Hippocrates Chius, & Parabolæ Archimedes invenerunt. Anguli rectilinei cum curvilineo æqualitatem exhibuit Proclus.

6. *In eadem ratione quantitates dicuntur eſſe prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum prima ſuam ſecundam toties præſe vel cum tali fractione continet vel in illa continetur, quoties præ-*

præcise vel cum quali fractione tertia suam quartam continet vel in illa continetur.

Cum proportionalitatis indicium ab Euclide datum non ex ipsis propositis numeris sed qualicunque eorum multiplicatione sit duductum; nos illud nimis longe petitam aliquam proportionalium proprietatem suppeditare puramus; quare illo omisso aliud exhibemus indicium ex ipsis numeris propositis derivatum, & immediate ex rationis natura, antea explicata deductum.

Supra quippe vidimus rationem nihil aliud esse quam certam quandam formulam seu modum continendi, quo una quantitas aliam continet, vel ab alia continetur: quemadmodum positis duobus numeris 16 & 4. modus ille quo 16 numerum 4 continet potest exprimi per nomen quadrupli quia 16 ipsum 4 quatuor vicibus continet.

Si jam ex duobus aliis numeris 8 & 2, ●us 8 alterum 2 etiam contineat eodem modo qui quadruplus dicitur, patet utrinque modum continendi esse æquatem vel potius eundem; cum autem, ut

ut ſupra notatum eſt, ratio & modus continendi ſit unum & idem, facile concludimus, rationem etiam utrinque eſſe eandem : adeoque quatuor quantitates 16 & 4 ut & 8 & 2, binas ac binas ſumptas eſſe in eadem ratione.

Eodem modo cum numerus 20 numerum 8 non abſolute aliquot vicibus absque fractione contineat, ſed modo continendi qui dicitur duplus cum dimidio; ſi ex numeris 10 & 4, primus 10 ſecundum 4 eodem modo duplo cum dimidio continet; utrimque modus continendi, ſeu quod jam pro eodem ſumimus, ratio erit eadem adeoque quatuor quantitates 20. 8. ut & 10. 4. binæ ac binæ acceptæ, in eadem erunt ratione.

7. *Eandem autem rationem habentes quantitates, vocantur proportionales.*

Quæ proportionales in duplici conſtitutæ ſunt genere.

Aut enim ſunt continue proportionales.

Aut non continue, quæ ſimpliciter tantum proportionales dicuntur.

Con-

Continue proportionales dicuntur illæ quantitates quæ ſunt in Progreſſione geometrica, inter quas a termino ad terminum eadem continuatur ratio, eundem terminum bis repetendo, ut ſemel primæ rationis ſit conſequens, antecedens vero ſecundæ.

Ex. gr. ex progreſſione gemetrica, cujus dominator eſt 2, ſcilicet 1. 2. 4. 8. 16. eligantur quatuor termini 1. 2. 4. 8. illi erunt continue proportionales; quia eadem ratio ſcilicet dupla a termino ad terminum continuo procedit: primus enim 1 ſe habet ad ſecundum 2, ſicut idem ſecundus 2 ad tertium 4. deinde ſecundus 2 ſe habet ad tertium 4. quemadmodum idem tertius 4 ſe habet ad quartum 8.

Non continue proportionales dicuntur quantitates. quando eadem ratio quæ eſt inter primum & ſecundum non continuatur inter ſecundum & tertium, ſed ibi interrupta demnm inter tertium & quartum invenitur, ut in hiſce numeris 12. 6. 8. 4. Ratio quæ eſt inter 12 & 6 non continuatur 6 & 8, ſed ibi interrupta tranſit ad duos reliquos terminos 8 & 4, cum 8 numerum 4 toties contineat quoties 12 continet 6. Hæ autem

quantitates, ut supra notavimus, generali nomine dicuntur Proportionales.

8. *Cum vero prima quantitas secundam pluribus vel paucioribus vicibus contineat, quam tertia continet quartam, tunc prima ad secundam dicitur habere majorem vel minorem rationem quam tertia ad quartam.*

Ponantur quatuor numeri 8. 2. 6. 3. ex quibus primus 8 secundum numerum 2 pluribus vicibus (scilicet quatuor) contineat quam tertius 6 quartum 3. (qui illum bis continet), ratio quam 8 habet ad 2 erit major ratione 6 ad 3. Ex rationis enim natura supra vidimus rationem 8 ad 2 exprimi posse per fractionem $\frac{8}{2}$ (cujus valor est 4), ut & rationem 6 ad 3, per fractionem $\frac{6}{3}$ (quæ tantum 2 valet) Cum autem fractio prima secunda major sit, patet etiam immediate ex rationis natura primam rationem secunda esse majorem.

Deinde ex quatuor numeris 12. 6. 8. 2. primus numerus 12 secundum 6 paucioribus

bus vicibus contineat (ſc. bis) quam tertius 8 quartum 2 (utpote quater): erit fractio $\frac{12}{6}$ minor fractione $\frac{2}{8}$ quippe prima valet tantum 2 ſecunda vero 4. Cum autem fractio & ratio unum idemque ſonent, etiam primam rationem ſecunda minorem eſſe patebit.

9. *Proportio vero in tribus ad minimum terminis conſiſtit.*

Quælibet ratio duos requirit terminos: unum antecedentem & unum conſequentem: Proportio vero duas ad minimum exigit rationes: adeoque quatuor poſtulat terminos: qui expreſſe etiam requiruntur ſi proportio non ſit continua: ſi vero proportio conſtituatur continua, tres termini ſufficiunt, & tum medium bis ſumendo idem eſt ac ſi quatuor eſſent poſiti. Quemadmodum in numeris 2. 4. 8. vel 16. 8. 4. vel aliis tribus quibuslibet, ratio primi ad ſecundum eſt prima: ratio vero ejuſdem ſecundi ad tertium eſt altera, quæ duæ unam conſtituunt proportionem.

10. *Cum tres quantitates proportionales fuerint, prima ad tertiam dicitur duplicatam habere rationem eam quam eadem prima habet ad ſecundam.*

At vero cum quatuor quantitates fuerint continue proportionales; prima ad quartam dicitur triplicatam habere eam rationem, quam eadem prima habet ad ſecundam.

Et ſic porro uno amplius, quamdiu proportio exſtiterit.

Quidam putant rationem duplam & rationem duplicatam, unam & eandem rem ſignificare, quæ duo tamen accurata a ſe invicem ſunt diſtinguenda.

Ratio enim dupla intercedit inter duas quantitates ſeu numeros, quorum unus alterum præciſe bis continet: quemadmodum numeri 8 ad 4. vel 6 a 3. ſunt in ratione dupla: cujus correlarum ratio ſubdupla eſt in rationibus 4 ad 8 vel 3 a 6.

Dupli-

Duplicata vero ratio etiam invenitur in numeris, ubi rationis duplæ ne minimum apparet vestigium. Exempli gratia in hisce tribus numeris continue proportionalibus 3. 9. 27. ratio quam primus 3 ad tertium 27 est duplicata rationis quam idem nnmerus primus 3 habet ad secundum 9; licet nulla inter illos inveniatur dupla; unde patet rationem duplam & duplicatam significare res toto cœlo diversas.

Dicitur autem ista ratio duplicata, quia ratio quæ est inter primum numerum & secundum, inter secundum & tertium adhuc semel quasi repetitur. Notandum autem est hanc rationis repetitionem non aliter concipiendam esse quam per formam Multiplicationis; ita ut positis rationis terminis 3 ad 9, ad repetendam adhuc semel eandem rationem illius termini per se ipsos debeant multiplicari, scilicet 3 per 3 & 9 per 9. ut obtineatur ratio terminorum 9 ad 81, quæ ratio erit duplicata rationis 3 ad 9.

Adeoque primus terminus 3 se habebit ad tertium 27 ut 9 ad 81. Illos quippe numeros esse proportionales, evidenter ex rationis & proportionalium natura antea tradita fit manifestum, cum nim. primus

3 in secundo 27 tot vicibus (scilicet novies) continetur, quot vicibus tertius 9 continetur in quarto 81.

Si jam porro ponantur quatuor continue proportionales 2. 4. 8. 16. ratio quæ est inter primum 2 & secundum 4, prima vice repetitur inter secundum 4 & tertium 8; & deinde secunda vice inter tertium 8 & quartum 16. Quæ repetitio cum per multiplicationem fiat, ut rationis 2 ad 4 inveniatur triplicata, termini 2 & 4 primo debent per se ipsos multiplicari; cujus multiplicationis productis 4 & 16 adhuc semel per eosdem terminos 2 & 4 multiplicatis obtinebuntur termini 8 & 64, constituentes quæsitam rationem triplicatam. Terminos enim 2. 16. 8. 64. esse inter se proportionales ex natura rationis facile probari potest.

Cæterum ex hic omnibus notandum venit, rationem duplicatam nihil aliud esse quam rationem quadratorum, quæ a propositæ rationis terminis fiunt. Rationem antem triplicatam alicujus rationis unam eandemque esse cum ratione cuborum, qui a terminis fiunt.

11. *Homologæ quantitates (in quatuor proportionalibus) dicuntur*

tur esse antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

Sint quatuor proportionales 2. 4. 3. 6. quantitas prima 2 & tertia 3 sunt utriusque rationis antecedentes, adeoqne homologæ seu ejusdem naturæ rem significantes : duæ vero reliquæ sc. secunda 4 & quarta 6 , quia utriusque rationes sunt consequentes similiter sunt homologæ.

De modis argumentandi.

Cum Mathematici ex quatuor proportionalibus non unam tantum sed plures eliciant conclusiones, quas modos seu formulas argumentandi vocant ; Euclides illos ad sex revocat, qui totidem sequentibus proponuntur definitionibus, & in hoc libro 5 totidem fere propositionibus demonstrantur.

12. *Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.*

Sint quatuor quantitates proportionales

12 — 6 = 8 / 4.

In quibus 12 & 8 ſint antecedentes; reliqui vero 6 & 4 conſequentes; alternando erit

12 — 8 = 6 / 4.

Hoc eſt Antecedens 12 eſt ad antecedentem 8, ſicut conſequens 6 ad conſequentem 4. Id quod demonſtratur prop. 16.

13. *Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis inſtar antecedentis ad antecedentem velut conſequentem.*

Si ponantur quatuor proportionales

12 — 6 = 8 / 4.

Ratione inverſa ſit erit.

6 — 12 = 4 / 8.

Seu ordine retrogrado priorem proportionem legendo

4 — 8 = 6 / 12.

14. *Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis cum conſequente*

quente velut unius ad ipſum conſequentem.

Sint iterum quatuor proportionales

$$12 - 6 = 8 / 4.$$

Per compoſitionem rationis dicimus.

$$\frac{12 + 6}{\text{ſeu } 18} - 6 = \frac{8 + 4}{\text{ſeu } 12} / 4.$$

Hoc eſt prima quantitas una cum ſecunda ſeſe habet ad ipſam ſecundam ſicut tertia cum quarta ad ipſam quartam. Hujus demonſtrationem vide prop. 18.

15. *Diviſio rationis eſt ſumtio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſum conſequentem.*

Sint quatuor proportionales.

$$18 - 6 = 12 / 4.$$

Per diviſionem rationis proportio ſic ſtabit.

$$\frac{18 \div 6}{\text{ſeu } 12} - 6 = \frac{12 \div 4}{\text{ſeu } 8} / 4.$$

Hoc eſt primus terminus minus ſeu dempto ſecundo ſe habet ad ipſum ſe-

cundum, quemadmodum tertius minus seu dempto quarto ad ipsum quartum. Hic argumentandi modus demonstratur prop. 17.

16. *Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens superat ipsum consequens.*

Propositi sint quatuor proportionales.

18 — 6 = 12 / 4.

Per conversionem rationis hanc habemus proportionem.

$$18 — \frac{18 \div 6}{\text{seu } 12} = 12 / \frac{12 \div 4.}{\text{seu } 8}$$

Hoc est primus se habet ad ipsum primum minus seu dempto secundo, quemadmodum tertius se habet ad ipsum tertium minus seu dempto quarto. Hæc demonstratur in Coroll. prop. 17.

17. *Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint quantitates, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur in eadem ratio-*

tione; cum ut in primis quantitatibus prima ad ultimam, sic & in secundis prima ad ultimam se habeat.

Sint tres quantitates. 12. 6. 4.

Et adhuc tres aliæ. 6. 3. 2.

Per rationem quæ est ex æqualitate concludimus

12 — 4 = 6 / 3.

Hoc est prima superiorum se habet ad suam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad suam tertiam.

Quia autem hæc conclusio duobus modis ex istis sex quantitatibus elicitur, duplex etiam se aperit ex æqualitate ratio; sc. Ordinata & Perturbata.

18. *Ordinata proportio est, cum fuerit (positis scilicet sex quantitatibus) ut prima superiorum ad suam secundam, ita prima inferiorum ad suam secundam; deinde ut secunda superiorum ad suam ultimam, ita secunda inferiorum ad suam ultimam: & conclu-*

cluditur quod prima superiorum se habeat ad suam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad suam ultimam.

Sint tres quantitates 12. 6. 4.
Et tres aliæ 6. 3. 2.
In quibus 12 — 6 = 6 / 3.
Deinde 6 — 4 = 3 / 2.
Proportio ex æquo ordinata sic stabit.
12 — 4 = 6 / 2.

Hujus modi demonstrationem vide prop. 22.

Cæterum hæc proportio dicitur Ordinata, quia & in superioribus & in inferioribus eundem servat ordinem.

19. *Perturbata autem proportio est, cum positis tribus quantitatibus & aliis tribus; ut in superioribus prima se habet ad suam secundam, sic in inferioribus secunda ad suam ultimam: & in seperioribus secunda ad suam ultimam, ita in inferioribus prima ad suam secundam: & concluditur*

tur: quod prima superiorum se-ita habeat ad suam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad suam ultimam.

Sint tres quantitates 12. 6. 3.
Et aliæ totidem 16. 8. 4.

In quibus 12 — 6 = 8 / 4.
Et 6 — 3 = 16 / 8.
Proportio ex æquo perturbata sic erit
12 — 3 = 16 / 4.

Hujus demonstrationem vide prop. 23.

Perturbata dicitur hæc proportio, quod in superioribus & inferioribus non idem servetur ordo, sed ille quasi perturbetur.

LEMMA I.

Multiplicatio nihil est aliud quam multiplex additio: sicut etiam divisio nihil aliud quam multiplex & compendiosa subtractio.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Sit nnmerus 6 multiplicandus. per

per numerum 4, nihil aliud imperatum est quam, ut numerus 6 toties sumatur, seu repetatur seu sibi ipsi addatur, quoties unitas continetur in 4, sc. quater: adeoque idem facimus sive numerum 6 multiplicemus per 4, sive eundem quater ponamus & illos quatuor numeros 4 in unam summam colligamus, cum utrobique obtineatur 24.

Pars 2. Si numerus 24 proponatur dividendus per numerum 4, idem est ac si examinandum esset. quoties numerus 4 a 24 possit subtrahi id quod in divisione unica subductione fit divisore prius per quotientem multiplicato cum subtractiones tot fieri possint, quot unitates divisionis contineat quotiens. Quare nulla est differentia sive 24 dividatur per 4 sive 4 a 24 subtrahatur quoties fieri potest cum utrobique idem obtineatur quotiens 6.

Notandum autem in multiplicatione non semper opus esse ut multiplicatio revera fiat, & numeri inter se commisceantur, aut productum unico numero exprimatur; cum eadem multiplicatio alia etiam forma designari possit, nimirum multiplicatores juxta se invicem scribendo

do interpoſito ſigno ·x·

Ex. gr. ſit 8 multiplicandus per 4 facta multiplicatione obtinetur productum 32, quod etiam hoc modo exprimi poteſt 8 ·x· 4. quod in pronuntiatione valet 8 multiplicata per 4.

Quæ exprimendi forma hoc habet commodum, quod jam pateat ad oculum per quam operationem & ex quibus numeris illud productum ſit ortum, quod in altero producto 32 non tam clare diſtingui poteſt, cum illud etiam ex multis aliis additionibus & multiplicationibus generari potuiſſet.

Præterea ſi productum 8 .x. 4 dividendum ſit per 4, omiſſo numero 4 ſcribendum erit 8. vel ſcribendum eſt 4, ſi dividi debeat per 8.

Similiter in diviſione non opus eſt ut ſemper vera fiat diviſio; cum quotiens quæſitus etiam alia forma poſſit exprimi, ſi nim. numero dividendo ſubſcribatur diviſor inter utrumque ducta lineola.

Ex. gr. oporteat dividere numerum 32 per 8, facta reali diviſione obtinetur quotiens 4, qui etiam deſignari poſſet per formam fractionis $\frac{32}{8}$, qui quotiens

tiens in elocutione idem valet 32 partes octavæ, seu 32 divisa per 8.

LEMMA II.

Si duo æquales numeri per eundem numerum multiplicentur, producta erunt inter se æqualia. Si vero per eundem numerum dividantur, quotientes erunt æquales.

DEMONSTRATIO.

1 Pars. Per Lemma I multiplicatio est multiplex & compendiosa additio: adeoque unus numerus multiplicandus toties sibi additur, quoties alter (qui priori ponitur æqualis) sibi ipsi additur: quia multiplicator utrimque ponitur idem: unde patet idem fieri ac si æqualibus æqualia addantur; quando nimirum summæ (quæ producto æquivalent) inter se sunt [a] æquales.

a Ax. 2.

2. Pars. Per idem Lemna I divisio est multiplex ac compendiosa subtractio: ergo ab uno numero dividendo toties subtrahitur divisor quoties ab altero dividendo (qui per hypothesin priori æqualis

est)

est) subtrahitur idem divisor: quare in ista divisione utrinque idem fit, ac si ab æqualibus æqualia demantur; quare residua (quæ quotientibus æquivalent) inter se sunt æqualia. b Ax. 3.

LEMMA III.

Si duo inæquales numeri per eundem numerum multiplicentur producta erunt inter se inæqualia. Si vero per eundem divisorem dividantur, quotientes erunt inæquales.

DEMONSTRATIO.

1. Pars. Cum per Lemma I multiplicatio fit compendiosa Additio: si duo numeri inæquales per eundem numerum multiplicentur, idem est ac numerus major toties sibi addatur quoties minor minori. At vero si inæqualibus æqualia adjiciantur, [a] tota sunt inæqualia per Ax. 4. Ergo etiam, si numero majori major toties adjiciatur quoties minor additur minori, prior summa, quæ hic producto æquivalet, erit major altera. a Ax. 4.

2. Pars. Quia divisio nihil aliud est quam compendiosa subtractio, si duo numeri inæquales per eundem numerum dividantur, nihil aliud fit quam quod idem numerus ab una parte a majori subtrahitur, ab altera vero a minori.

Patet autem eundem numerum pluries subtrahi a majori posse quam a minori; cum major eundem numerum pluries contineat quam minor: & cum plures istæ subtractionis vices constituant majorem quotientem, sequitur ex divisione majoris numeri per alium quemlibet acquiri majorem quotientem, quam ex minoris numeri per eundem divisione.

LEMMA IV.

Si idem numerus vel duo numeri æquales per numeros inæquales multiplicentur, producta erunt inæqualia, & quidem productum majoris multiplicatoris erit majus producto minoris multiplicatoris.

Ut & si dividantur per numeros inæquales, quotientes erunt inæquales. Major quidem ille ubi di-

divisor est minor; at vero minor, ubi divisor est major.

DEMONSTRATIO.

Hæc ex superioribus nullo negotio deduci potest.

Quatuor hisce Lemmatibus præmissis, & qualicunque Arithmeticarum in fractionibus operationum notitia præsupposita, quædam subjungimus Theoremata, quæ tanquam generale omnium fere totius libri quinti propositionum demonstrandarum fundamentum præstruimus.

THEOREMA I.

Si quatuor quantitates sint proportionales, productum quod oritur ex multiplicatione extremarum est æquale producto multiplicationis mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sint quatuor proportionales.

8 — 4 = 6 / 3.

Ratio 8 ad 4 eadem est cum fractione

 $\frac{8}{4}$

$\frac{8}{4}$ & ratio 6 ad 3 exprimitur per fractionem $\frac{6}{3}$: quia autem rationes sunt eadem seu æquales; erunt quoque fractiones inter se æquales.

Adeoque $\frac{8}{4} \propto \frac{6}{3}$.

———— utrinque multipl. per 4.

$8 \propto \frac{4 \cdot x \cdot 6.}{3.}$ Per Lemma II.

Et ———— utrimque multipl. per 3.

$8 \cdot x \cdot 3 \propto 4 \cdot x \cdot 6$ per Lemma II.

Hoc est productum extremorum 8 & 3 per se invicem multiplicatorum est æquale producto mediorum etiam multiplicatorum. Q. E. D.

THEOREMA II.

Si duo producta sint inter se æqualia, unus multiplicator primi producti se habet ad unum multiplicatorem secundi producti, quemadmodum reciproce alter multiplicator ejusdem secundi producti se habet ad alterum multiplicatorem primi producti.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sint duo producta inter se æqualia.

$8 \times 3 \propto 4 \times 6$. per Lemma II.

——————— utrimque divid. per 3.

$8 \propto \frac{4 \times 6}{3}$. Per Lemma II.

——————— utrimque divid. per 4.

$\frac{8}{4} \propto \frac{6}{3}$ Per Lemma II.

Quæ fractiones si revocentur ad rationes, erit

$8 - 4 = 6 / 3$.

Quod juxta tenorem Theorematis E. D.

COROLLARIUM I.

Eodem modo posset demonstrari esse.

$8 - 6 = 4 / 3$.
Vel $3 - 4 = 6 / 8$.
Vel $3 - 6 = 4 / 8$.

Quæ proportiones involvunt tum Alternationem, tum inversam etiam rationem.

COROLLARIUM II.

Hinc evidentur patet, si quælibetcunque quatuor quantitates eo ordine sint positæ, & productum extremarum producto mediarum fuerit æquale, certissime inde concludi posse, istas quatuor quantitates eo ordine proportionales esse.

SCHOLIUM.

Si quilibet datus numerus ex. gr. 24. resolvatur in duos per quorum multiplicationem potuerit generari (quod hic quater potest fieri vel per 1 in 24. vel per 2 in 12. vel per 3 in 8. vel per 4 in 6.) facile probatur esse.

	1	⸗	2	☰	12	/ 24.
Vel	2	⸗	3	☰	8	/ 12.
Vel	3	⸗	4	☰	6	/ 8.
Vel	1	⸗	3	☰	8	/ 24.
Vel	1	⸗	4	☰	6	/ 24.
Vel	2	⸗	4	☰	6	/ 12.

Et sic de quolibet alio numero dato.

THEO-

THEOREMA III.

Si ex quatuor quantitatibus prima ad ſecundam majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam: productum quod fit per multiplicationem extremarum majus erit producto mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sit in quatuor hiſce quantitatibus

$8 - 3 < 4 / 2.$

Erit ſecundum ante dicta.

$\frac{8}{3} < \frac{4}{2}.$

———————— utrimque multipl: per 3.

$8 < \frac{3 \cdot x \cdot 4}{2}$ per Lemma 3.

———————— utrimque multipl. per 2.

$8 \cdot x \cdot 2 < 3 \cdot x \cdot 4.$ per Lemma 3.

Hoc eſt productum extremorum 8 & 2 majus producto mediorum 3 & 4.

Q. E. D.

THEOREMA IV.

Si duo producta sint inaequalia, prima quantitas multiplicans majoris producti ad primam quantitatem multiplicantem minoris producti majorem habebit rationem, quam reciproce secunda quantitas ejusdem minoris producti ad secundam quantitatem majoris producti.

DEMONSTRATO.

Sit ex propositis hisce productis

$8 \cdot x \cdot 2 < 3 \cdot x \cdot 4.$

———————— utrimque divid. per 2.

$8 < \frac{3 \cdot x \cdot 4}{2}$ per Lemma III.

———————— utrimque divid. per 3.

$$\frac{8}{3} < \frac{4}{2}$$

Hoc est redigendo hasce fractiones ad rationes

$8 — 3 < 4 / 2.$ Q. E. D.

COROL-

COROLLARIUM I.

Eadem methodo facile possent demonstrari esse

8 — 4 < 3 / 2.
Vel 2 — 3 < 4 / 8.
Vel 2 — 4 > 3 / 8.

COROLLARIUM. II.

Hinc sequitur, si quælibetcunque quatuor quantitates ordine sint positæ, & productum extremarum producto mediarum sit majus, firmiter concludendum esse, primam ad secundam habere majorem rationem, quam tertia habet ad quartam.

SCHOLIUM.

Si duo quilibet numeri inæquales 24 & 16 resolvantur in suos multiplicatores

sc: 24	& 16.
in	in
1. 24.	1. 16.
2. 12.	2. 8.
3. 8.	4. 4.
4. 6.	

ex hoc Theoremate patet esse

Vel 1 — 1 < 16 / 24.
Vel 1 — 2 < 8 / 24.
Vel 1 — 4 < 4 / 24.

Deinde

Vel 2 — 1 < 16 / 12.
Vel 2 — 2 < 8 / 12.
Vel 2 — 4 < 4 / 12.

Postea.

Vel 3 — 1 < 16 / 8.
Vel 3 — 2 < 8 / 8.
Vel 3 — 4 < 4 / 8.

Denique

Vel 4 — 1 < 16 / 6.
Vel 4 — 2 < 8 / 6.
Vel 4 — 4 < 4 / 6.

Præter alias 36 majoritatis proportiones, quæ ex hisce numeris elici possunt.

THEO-

THEOREMA V.

Si ex quatuor quantitatibus prima ad secundam minorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; productum quod fit per multiplicationem extremarum minus erit producto mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sit in quatuor hisce quantitatibus

4 — 2 > 8 / 3.

Erit $\frac{4}{2} > \frac{8}{3}$

———————— utrimque multipl. per 3.

$\frac{4 \cdot x \cdot 3}{2} > 8$. Per Lemma III.

———————— utrimque multipl. per 2.

$4 \cdot x \cdot 3 > 8 \cdot x \cdot 2$. per Lemma III.

Hoc est productum extremarum 4 & 3 est minus producto mediarum 2. 8.

THEO-

THEOREMA VI.

Si duo producta sint inaequalia, prima quantitas multiplicans minoris producti ad primam quantitatem multiplicantem: majoris producti minorem habebit rationem, quam reciproce secunda quantitas ejusdem majoris producti ad secundam quantitatem minoris producti.

DEMONSTTATIO.

Sit ex duobus hisce productis.

$4 \cdot x \cdot 3 > 8 \cdot x \cdot 2.$

———————— utrimque divid. per 2.

$\frac{4 \cdot x \cdot 3}{2} > 8.$ Per Lemma III.

———————— utrimque divid. per 3.

$\frac{4}{2} > \frac{8}{3}$ per Lemma III.

Hoc est redigendo ad rationes

$4 - 2 > 8 / 3.$

C O.

COROLLARIUM I.

Eadem methodo facile posset demonstrati, quod sit

$$4 - 8 > 2 / 3.$$

$$\text{Vel } 3 - 8 > 2 / 4.$$

$$\text{Vel } 3 - 2 > 8 / 4.$$

COROLLARIUM II.

Hinc patet, si quælibetcunque quatuor quantitates ordine sint positæ, & productum extremarum sit minus producto mediarum, certissime concludi, primam ad secundam habere minorem rationem, quam tertia ad quartam.

SCHOLIUM.

Si duo quilibet numeri inæquales 16 & 24 resolvantur in suos multiplicatores:

sc:	16.			24.
in				
1.	16.		1.	24.
2.	8.		2.	12.
4.	4.		3.	8.
			4.	6.

Ex

Ex hoc Theoremate patet esse

1 — 1 > 24 / 16.
Vel 1 — 2 > 12 / 16.
Vel 1 — 3 > 8 / 16.
Vel 1 — 4 > 6 / 16.

Præterea.

Vel 2 — 1 > 24 / 8.
Vel 2 — 2 > 12 / 8.
Vel 2 — 3 > 8 / 8.
Vel 2 — 4 > 6 / 8.

Denique

Vel 4 — 1 > 24 / 4.
Vel 4 — 2 > 12 / 4.
Vel 4 — 3 > 8 / 4.
Vel 4 — 4 > 6 / 4.

Præter alias 36 minoritatis proportiones, quæ ex hisce numeris deduci possunt.

Jam sequuntur ipsæ Libri quinti Propositiones.

PROPOSITIO I.

Si sint quotcunque magnitudines seu quantitates proportionales A. B. C. D. E. F. quemadmodum se habuerit una antecedentium ad suam consequentem, ita omnes antecedentes G simul se habebunt ad omnes consequentes etiam simul sumptas H.

DEMONSTRATIO.

Sint in eadem inter se ratione

A 3	—	1 B	}	A
C 6	—	2 D		
E 9	—	3 F		
G 18	—	6 H.		

Demonstrandum est esse summam ad summam ut quælibet antecedens ad suam consequentem.

Hoc est 18 — 6 = 3 / 1.
Deinde 18 — 6 = 6 / 2.
Denique 18 — 6 = 9 / 3.

Quia in qualibet proportione productum extremorum facta multiplicatione est æquale producto mediorum, quatuor illarum termini sunt [a] proportionales. a 2 Corol. Theor. 2.

PRO-

PROPOSITIO II. & XXIV.

Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; habuerit autem & quinta E ad secundam B eandem rationem quam sexta F ad quartam D; Etiam G, composita prima cum quinta ad secundam B, eandem habebit rationem quam H tertia cum sexta ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

	A		B		C		D	
Sit	4	—	2	=	6	/	3.	A.
	E 10				F 15			
	G 14				H 21			

Si instituatur multiplicatio, producta erunt æqualia, ergo a istæ quantitates sunt proportionales.

a Theor. 2.

Aliter

Aliter

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4}{2} \infty \frac{6}{3} \\ \frac{10}{2} \infty \frac{15}{3}\end{array}\right\} A.$$

$\frac{14}{2}$ b ∞ $\frac{21}{3}$ vel in proportione. b Ax. 2.

$14 — 2 = 21. / 3.$ Q. E. D.

PROPOSITIO III.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. sint proportionales; & prima A & tertia C per eundem quemlibet numerum G multiplicentur: productum primum E se habebit ad secundam B, quemadmodum productum secundum F ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 4 — & 2 = & 6 / & 3 \\ G\,2 & & G\,2 & \\ \hline E\,8 & & F\,12 & \end{array}\right\} M.$$

Demonstrandum est

E	B	F	D
8 —	2 =	12 /	3.

a Theor. 2. Id quod a exinde patet, quod producta extremorum & mediorum sunt æqualia,

Aliter

$\frac{4}{2} \propto \frac{6}{3}$

———————utrimque multipl. per 2.

$\frac{8}{2} \propto \frac{12}{3}$ Lemma II.

Hoc est in proportione

8 — 2 = 12 / 3.

PROPOSITIO IV.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. sint proportionales; prima vero A & tertia C. per quemlibet eundem numerum G multiplicentur; ut & secunda B & tertia D per alium numerum K. quatuor ista producta inter se proportionalia erunt.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sint quatuor proportionales

A	B	C	D	
4 ⸺	2 =	6 /	3.	M.
G 2	K 3	G 2	K 3.	
E 8	L 6	F 12	M 9.	

Demonstrandum est quatuor producta E. L. F. M. esse proportionalia seu

8 ⸺ 6 = 12 / 9.

Quod ex Theor. 2. sequitur, quia facta multiplicatione producta extremorum & mediorum inter se sunt æqualia.

Aliter

$$\frac{4}{2} \propto \frac{6}{3}$$

———————— multipl. per 2.

$$\frac{8}{2} \propto \frac{12}{3}$$ Lemma II.

———————— divide per 3.

$$\frac{8}{6} \propto \frac{12}{9}$$ per idem Lemma II.

Hoc est in proportione

8 ⸺ 6 = 12 / 9.

PROPOSITIO V. XIX.

Si totum A ad totum B eandem habuerit rationem, quam ablata pars C ad partem ablatam D: etiam pars reliqua E ad partem reliquam F, eandem habebit rationem, quam totum A ad totum B.

DEMONSTRATIO.

A. 8   4 B] S
C 6   3 D]

Erit E F A B.
2 — 1 = 8 / 4.

Quia producta sunt æqualia. per Theor. 2.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D, habuerit autem & quinta E ad secundam B eandem rationem quam sexta F ad quartam D. Si quinta E subtrahatur a prima A, & sexta F a tertia C,

Vel residuum primum G erit æquale secundæ B & residuum secundum H æquale quartæ D.

Vel residuum primum G se habebit ad secundam B sicut residuum secundum H ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

A		B		C		D	
12	⊣	2	=	18	/	3.	S
E 10				F 15.			
G 2				H 3.			

 CA-

CASUS II.

A	B	C	D	
12 —	2 ∺	18 /	3.	S
E 4		F 6		
Erit G	B	H	D.	
8 —	2 ∺	12	3.	

Per Theor. 2.

Aliter.

CASUS I.

$\frac{12}{2}$ ꝏ $\frac{18}{3}$ } S

$\frac{10}{2}$ ꝏ $\frac{15}{3}$

$\frac{2}{2}$ ꝏ $\frac{3}{3}$ per Axioma 3.

Erit in proportione, ex ratione æqualitatis

2 — 2 ∺ / 3.

CASUS II.

$\frac{12}{2}$ ꝏ $\frac{18}{3}$ } S

$\frac{4}{2}$ ꝏ $\frac{6}{3}$

$\frac{8}{2}$ ꝏ $\frac{12}{3}$

Hoc est in proportione

8 — 2 ∺ 12 / 3.

PRO-

PROPOSITIO VII.

1. *Æquales A & A ad eandem C eandem habent rationem.*

2. *Et eadem C ad æquales A & A eandem habet rationem.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A C A A.
12 ⌐ 4 ∺ 12 / 4.

PARS II.

C A C A.
4 ⌐ 12 ∺ 4 / 12.

Quia utrobique producta sunt æqualia. per Th: 2.

PROPOSITIO VIII.

1. *Inæqualium quantitatum A. B. major A ad eandem C majorem rationem habet, quam minor B.*

2. *Et eadem C ad minorem B majorem habet rationem quam ad majorem A.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A B

$16 < 8$ ex hypoth.

———————— utrimque divide per 5. C.

$\frac{16}{5} < \frac{8}{5}$ per Lemma III.

Hoc est in proportione

$16 - 5 < 8 / 5.$

PARS II.

$$\left.\begin{matrix} 5 & \infty & 5 \\ 8 & > & 16 \end{matrix}\right] \text{D.}$$

$\frac{5}{8} < \frac{5}{16}$ per Lemma IV.

Hoc est in proportione.

$5 - 8 < 5. / 16.$

PRO-

PROPOSITIO IX.

1. *Si A & B ad eandem C habeant eandem rationem, illæ æquales inter se erunt.*

2. *Et si eadem C ad A & B habeat eandem rationem, illæ itidem æquales erunt.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A C B C

15 — 4 = 15 / 4.

Ergo $\frac{15}{4} \infty \frac{15}{4}$.

———————— multipl. per 4.

$15 \infty 15$.

PARS II.

C H C B

4 — 15 = 4 / 15.

Ergo $\frac{4}{15} \infty \frac{4}{15}$

———————— mult. per 15.

$15 \cdot x \cdot 4 \infty 15 \cdot x \cdot 4$. per Lem. II.

———————— div. per 4.

$15 \infty 15$. per idem Lemma II.

PROPOSITIO X.

1. *Si A ad C majorem rationem habet quam B ad eandem C, erit A major quam C.*

2. *At si eadem C ad B majorem rationem habuerit quam ad A, erit B minor quam A.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

A		C		B		C
16	—	4	<	8	/	4.

Ergo $\frac{16}{4} < \frac{8}{4}.$

——————multipl. per 4.

16 < 8. per Lemma III.

PARS II.

C		B		C		A.
4	—	8	<	4	/	16.

$\frac{4}{8} < \frac{4}{16}$

——————multipl. per 8.

$4 < \frac{4 \cdot x \cdot 8}{16}$ per Lemma.

mul-

———————— multipl. per 16.

4 ·x· 16 ⋖ 4 ·x· 8. Lemma III.

———————— div. per 4.

16 ⋖ 8.

Alio modo.

A C B C

16 — 4 ⋖ 8 / 4.

Ergo 4 ·x· 16 ⋖ 4 ·x· 8. Theor. 3.

———————— div. per 4.

16 ⋖ 8. Lemma III.

PARS II.

C B C A.

4 — 8 ⋖ 4 / 16.

Ergo 4 ·x· 16 ⋖ 4 ·x· 8. Theor. 4.

———————— div. per 4.

16 ⋖ 8. Lemma III.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Rationes, quæ eidem rationi sunt eædem, vel similes vel æquales, inter se sunt eædem vel similes vel æquales.

DEMONSTRATIO.

Sit 8 — 4 = 6 / 3.
Et 10 — 5 = 6 / 3.

Erit 8 — 4 = 10 / 5.

Quia nimir. producta sunt æqualia. per Theor. 2. Vel sic.

$$\frac{8}{4} \propto \frac{6}{3}$$

$$\frac{10}{5} \propto \frac{6}{3}$$

$$\text{Ergo } \frac{8}{4} \propto \frac{10}{5} \text{ Ax. I.}$$

Hoc est in proportione.

8 — 4 = 10 / 5.

PROPOSITIO XII.

Hæc est eadem cum prima, quæ videri potest.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Si prima ratio sit æqualis secundæ rationi; secunda vero sit major tertiâ: similiter etiam prima tertia major erit.

DEMONSTTATIO.

Sit $16 \dashv 8 = 12 \,/\, 6$.
At vero $12 \dashv 6 < 4 \,/\, 3$.

Ergo $16 \dashv 8 < 4 \,/\, 3$.

Quia productum extremorum est majus producto mediorum, per 2 Coroll. Theor: 4.

Vel hoc modo.

$$\frac{16}{8} \propto \frac{12}{6}$$

$$\text{Atqui } \frac{12}{6} < \frac{4}{3}$$

$$\text{Ergo } \frac{16}{8} < \frac{4}{3}$$

———— Et in proportione
$16 \dashv 8 < 4 \,/\, 3$.

PROPOSITIO XIV.

Si quatuor proportionalium A.B. C.D. prima A fuerit major tertia C, erit & secunda B major quarta D.

Si A æqualis C, erit B æqualis D.

Si A minor C, erit B minor D.

DEMONSTRATO.

CASUS I.

A B C D
12 — 8 = 6 / 4.
Ergo 12 .x. 4 ꝏ 8 .x. 6.] Div.
12 < 6]
―――――――――――
4 > 8. per Lemma IV.

CASUS II.

A B C D.
12 — 4 = 12 / 4.
Ergo 12 .x. 4 ꝏ 12 .x. 4.] Div.
12 ꝏ 12]
―――――――――――
4 ꝏ 4. per Lemma II.

CASUS III.

A B C D.
4 — 6 = 8 / 12.
Ergo 4 .x. 12 ꝏ 6 .x. 8.] Div.
4 > 8]
―――――――――――
12 < 6. Lemma IV.

PRO.

PROPOSITIO XV.

Si duæ quantitates A & B æqualibus vicibus sumantur seu per eundem numerum multiplicentur, summæ seu producta habebunt inter se eandem rationem quam habent posita quantitates A & B.

DEMONSTRATIO.

	A	B	
	4	12	M.
	2	2	
Erit	8	24	= 4 / 12.

Quia producta sunt æqualia. Theor. 2.

SCHOLIUM.

Si eædem quantitates A & B per eundem numerum dividantur, quotientes ipsis quantitatibus proportionales erunt.

A	B	
4	12	D.
2	2	
2 —	6	= 4 / 12. per Theor: 2.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. proportionales fuerint, illæ etiam vicissim proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D

16 — 8 = 4 | 2.

Erit etiam vicissim, seu permutando.

16 — 4 = 8 | 3.

Quia facta multiplicatione producta sunt æqualia, per Theor: 2.

SCHOLIUM.

Commode hic demonstratur ratio inversa. Sint Proportionales.

A B C D.

16 — 8 = 4 | 2.

Erit per Theor. I.

16 .x. 2 ∞ 8 .x. 4.

Ergo per Theor: 2.

2 — 4 = 8 | 16. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

Si compositæ quantitates proportionales fuerint, illæ quoque divisæ proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

16 — 12 = 8 / 6.

Erit quoque dividendo.

$$\frac{16 \div 12}{\text{seu} \quad 4} - 12 = \frac{8 \div 6}{\text{seu} \quad 2} \;/\; 6.$$

Id quod multiplicatione probatur per Theor. 2.

Vel alio modo per prop: 6. hujus]

$$\left.\begin{array}{llll} 16 - & 12 = & 8 / & 6. \\ 12 & & 6 & \end{array}\right] S$$

4 — 12 = 2 / 6. Q. D. E.

SCHOLIUM.

Cum ratio conversa commode hic inseri possit, sint proportionales.

16 — 12 = 8 / 6.

Erit convertendo

$$16 - \frac{16 \div 12}{\text{seu} \quad 4} = 8 \;/\; \frac{8 \div 6}{\text{seu} \quad 2}$$

Quia nim: producta sunt æqualia. per Theor: 2.

PROPOSITIO XVIII.

Si divisæ quantitates proportionales fuerint, illæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D.
4 — 12 = 2 / 6.
Erit componendo.
4 ✠ 12 seu 16 — 12 = 2 ✠ 6 seu 8 / 6.
Per Theor: 2. cum producta sint æqualia.
Aliter per prop: 2. hujus.
4 — 12 = 2 / 6 } A.
12 6
16 — 12 = 8 / 6.

PROPOSITIO XIX.

Vide propos. V. quæ cum hac est eadem.

PROPOSITIO XX.

Hæc demonstrabitur post pr. 22.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Et hæc post propos. 23.

PROPOSITIO XXII.

Si fuerint quotcunque quantitates A. B. C. & aliæ numero æquales D. E. F. fuerit autem ordinate ut A ad B. sic D ad E: & ut B. ad C ita E ad F: illæ ex æqualitate ordinatâ in eadem ratione erunt; hoc est A ad C. ut D. ad F.

DEMONSRTATIO.

Positæ sint quantitatos

A	B	C.
16	8	4.
D	E	F.
12	6	3.

Ita ut sit

A B D E.
16 — 8 = 12 / 6.

Et

B C E E.
8 4 = 6 / 3.

 Erit

Erit ex æqualitate ordinata.

A C D F.
16 — 4 ∺ 12 / 3.

Per multiplicationem extremorum & mediorum juxta Theor: 2.

Alio modo

16 — 8 ∺ 12 / 6 8 — 4 ∺ 6 / 3.
viciſſim 16. V. viciſſim 16. V.
16 — 12 ∺ 8 / 6 8 — 6 ∺ 4 / 3.

Atqui etiam
4 — 3 ∺ 8 / 6.

Ergo 11. V.
16 — 12 ∺ 4 / 3.

Et viciſſim 16. V.
A C D F.
16 — 4 ∺ 12 / 3.

Hiſce ſic demonſtratis dicit propoſitio XX.

Si prima A fuerit $<$ tertia C, etiam quartam D forte $<$ ſexta F.
Si A ſit ∞ C. fore D ∞ F.
Si A ſit $>$ C. fore D $>$ F.

Quæ omnia ex prop: 14. patent ſi ultima proportio permutetur ut ſit
16 — 12 ∺ 4 / 3.

PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres quantitates A. B. C, & aliæ tres D. E. F, fuerit autem perturbate ut A ad B ita E ad F; & ut B ad C ita D ad E: illæ ex æqualitate perturbata in eadem ratione erunt sc. A erit ad C ut D ad F.

DEMONSTRATIO

Positæ sint quantitates A B C.
16 8 2.
D E F.
24 6 3.

Ita ut sit

16 — 8 = 6 / 3.

Et

8 — 2 = 24 / 6.

Erit ex æquo

16 — 2 = 24 / 3.

Quia multiplicando acquiruntur producta æqualia. Ergo per Theor. 2. illæ quantitates proportionales.

Alio modo

16 — 8 ⊐ 6 / 3.	8 — 2 ⊐ 24 / 6.
Ergo Theor. I.	Theor. I.
3 ·x· 16 ꝏ 8 ·x· 6.	8 ·x· 6 ꝏ 2 ·x· 24

Ergo per Ax. I.

3 ·x· 16 ꝏ 2 ·x· 24.

Adeoque per Theor. 2.

A C D F.
16 — 2 ⊐ 24 / 3.

Quibus positis dicit propositio XXI.

Si sit prima A < tertia C, etiam quartam D fore majorem sexta F.

Si A sit ꝏ C, fore D ꝏ F.

Si A sit > C. fore D > F.

Quæ omnia rursus ex 14 V. patent, si ultima proportio permutetur, ut sit

16 — 24 ⊐ 2 / 3.

PROPOSITIO XXIV.

Hæc est eadem cum prop. II. *quæ videri potest.*

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. proportionales fuerint: maxima A simul cum minima D. reliquis duabus B. C. simul sumptis majores erunt.

DEMONSTRATIO.

12 — 4 = 9 / 3.

12 < 9 ⎤ S — Ex Hypoth.
4 3 ⎦ — Partes similes.

---

8 < 6 ⎤ A
4 + 3 = 4 + 3. ⎦

---

12 + 3 < 4 + 9.

Q. E. D.

Reliquæ ſequentes novem propoſitiones non ſunt Euclidis; poſſunt tamen, eadem, qua præcedentes Euclidis, facilitate demonſtrari.

PROPOSITIO XXVI.

Si prima A ad secundam B habuerit majorem rationem quam tertia C ad quartam D, habebit invertendo quarta D ad tertiam C majorem rationem quam secunda B ad primam A.

DEMONSTRATIO.

	A		B		C		D.
Sit	8	—	4	<	5	/	3.

Erit per Theor. 3.

3 ·x· 8 < 5· ·x. 4.

Ergo per Theor. 4.

3 — 5 < 4 / 8.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Si prima A ad secundam B habuerit majorem rationem, quam tertia C ad quartam D, habebit quoque vicissim prima A ad tertiam C, majorem rationem quam secunda B ad quartam D.

DEMONSTRATO.

	A		B		C		D.	
Sit	8	—	4	<	5	/	3.	
Erit	8 ·x· 3.		<		5 ·x· 4.			Theor. 3.

Ergo per Theor. 4.

8 — 5 < 4 / 3.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

Si prima A ad secundam B habuerit majorem rationem quam tertia C ad quartam D. habebit quoque composita prima cum secunda ad ipsam secundam B majorem rationem quam composita tertia cum quarta ad ipsam quartam D.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

Sit 8 — 4 < 5 / 3.

Erit quoque

$$\frac{8 \boxplus 4}{\text{seu } 12} — 4 < \frac{5 \boxplus 3}{\text{seu } 8} / 3.$$

Quia productum extremorum est majus producto mediorum. per Theor: 4.

Aliter.

$$\left.\begin{array}{ccc} \frac{8}{4} & < & \frac{5}{3}. \\ \frac{4}{4} & \infty & \frac{3}{3}. \end{array}\right\} \text{A.}$$

$$\frac{12}{4} < \frac{8}{3}. \quad \text{Ax. 4.}$$

Hoc est 12 — 4 < 8 / 3.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Si prima A ad secundam B habuerit majorem rationem quam tertia C ad quartam D, habebit dividendo prima minus seu demta secunda, ad ipsam secundam B majorem rationem, quam tertia minus seu dempta quarta ad ipsam quartam D.

DEMONSTRATIO.

A B C . D.

Sit $12 — 4 < 8 \mid 3$.

Erit quoque

$$\frac{12 \div 4}{\text{seu } 8} — 4 < \frac{8 \div 3}{\text{seu } 5} \mid 3.$$

Per Theor. 4. Quia productum extremorum est majus producto mediorum. Vel etiam hoc modo.

$$\left.\begin{array}{ccc} \frac{12}{4} & < & \frac{8}{3} \\ \frac{4}{4} & \infty & \frac{3}{3} \end{array}\right\} S$$

$$\frac{8}{4} < \frac{5}{3} \text{ per Ax. } 5$$

Hoc est $8 — 4 < 5 \mid 3$. Q.E.D.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Si prima A ad secundam B majorem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; habebit per rationis conversionem, prima ad ipsam primam minus seu dempta secunda minorem rationem quam tertia ad ipsam tertiam minus quarta.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

$12 - 4 < 8 / 3.$

Demonstrandum est quod sit

$12 - 12 \div 4 > 8 / 8 \div 3.$

seu 8 seu $5.$

Id quod patet ex multiplicatione: quia nim. productum extremorum est minus producto mediorum. per Theorema 6.

PRO-

PROPOSITIO XXXI.

Si fuerint tres quantitates A. B. C. & aliæ tres D. E. F. *sitque major ratio primæ priorum A ad secundam* B, *quam primæ posteriorum* D *ad suam secundam* E: *ut & major ratio secundæ priorum B ad suam tertiam C, quam secundæ posteriorum E ad suam tertiam F:* Erit *quoque ex æqualitate* or*dinata major ratio primæ priorum A ad suam tertiam C, quam primæ posteriorum* D, *ad suam tertiam F.*

DEMONSTRATIO.

A	B	C
16	8	4
D	E	F.
9	5	3.

Sit 16 — 8 < 9 / 5.

Et 8 — 4 < 5 / 3.

Erit ex æquo.

16 — 4 < 9 / 3.

Id

Id quod patet ex multiplicatione, cum productum extremorum ſit majus producto mediorum, per Theor: 4.

Aliter.

16 — 8 < 9 / 5.

vicissim. 27. V.

16 — 9 < 8 / 5.

Et

8 — 4 < 5 / 3.

vicissim. 27. V.

8 — 5 < 4 / 3.

Ergo.

16 — 9 < 4 / 3.

Vicissim.

16 — 4 < 9 / 3.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Si sint tres quantitates A. B. C. & aliæ tres D. E. F. sitque major ratio primæ priorum A ad suam secundam B quam secundæ posteriorum E ad suam tertiam F: ut & ratio secundæ priorum B ad suam tertiam C major quam primæ posteriorum D ad suam secundam E Erit quoque ex æqualitate perturbata major ratio primæ priorum A ad suam tertiam C, quam primæ posteriorum D ad suam tertiam F.

DEMONSTRATIO.

A	B	C
16	8	5
D	E	F.
9	6	4

Sit 16 — 8 < 6 / 4.
Ut & 8 — 5 < 9 / 6.

Erit ex æquò.

16 — 5 < 9 / 4.

Per

Per Theor: 4. Quia ſcilicet productum extremorum eſt majus producto mediorum.

Alio modo.

16 — 8 < 6 / 4.
Ergo 16 ·x· 4 > 8 ·x· 6.

Et

8 — 5 < 9 / 6.
8 ·x· 6 < 5 ·x· 9.

Ergo.

16 ·x· 4 < 5 ·x· 9.
Adeoque 16 — 5 < 9 / 4.
per Theor: 4.

PROPOSITIO XXXIII.

Si fuerit major ratio totius A ad totum B, quam ablati C ad ablatum D, erit & reliqui E ad reliquum F major ratio quam totius A ad totum B.

DEMONSTRATIO.

Sint in majori ratione tota

	A.	B.		
	12	6		S
quam partes	4	3	D	

Erit 8 — 3 < 12 / 6.

Per Theor: 4. quia productum extremorum est majus producto mediorum.

PROPOSITIO XXXIV.

Si sunt quotcunque quantitates, A. B. C. & aliæ æquales numero D. E. F. sitque major ratio primæ priorum A ad primam posteriorum D, quam secundæ B ad secundam E: ut & secundæ B ad secundam E major, quam tertiæ C ad tertiam F, & sic deinceps.

1. *Habebunt omnes priores, simul A. B. C. ad omnes posteriores simul D. E. F. majorem rationem, quam omnes priores B. C. relicta prima A, ad omnes posteriores E. F. relicta quoque prima D.*

2. *Minorem autem quam prima priorum A ad primam posteriorum D.*

3. *Ma-*

3. *Majorem denique quam ultima priorum C ad ultimam posteriorum F.*

DEMONSTRATIO.

Positæ sint quantitates

Priores		Posteriores.	
A	12	D	6
B	8	E	5
C	4	F	3.
	24.		14.

PARS I.		B + C	E + F.	
24 — 14	<	12	/	8.
PARS II.		A		D.
24 — 14	>	12	/	6.
PARS III.		C		F.
24 — 14	<	4		3.

Partis 1 & 3 demonstratio pendet ex Theoremate 4. quia producta extremorum sunt majora productis mediorum.

Pars vero 2 demonstratur per Theor. 6, quia productum extremorum est minus producto mediorum.

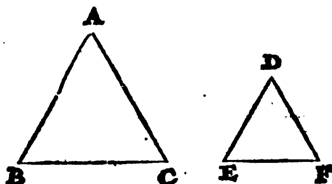
FINIS LIBRI QUINTI.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

1. *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales sunt, proportionalia.*



Ad constituendam figurarum rectilinearum similitudinem requiruntur duæ conditiones.

1. Ut singuli singulis inter se sint æquales anguli A & D. B. & E. C & F.

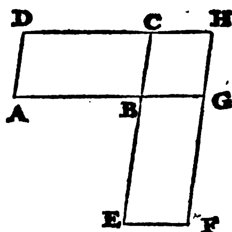
2. Ut latera circum istos æquales angulos sint proportionalia; scil.

Circa

Circa A. D. BA — AC = ED / DF.
Circa B. E. CB — BA = FE / ED.
Circa C. F. BC — CA = EF / FD.

Ergo si una ex hisce conditionibus deficiat, figuræ nullo modo erunt similes: quemadmodum quadratum & altera parte longior figura, licet habeant omnes angulos æquales, utpote rectos, quia vero latera non habent proportionalia, similia dicenda non sunt.

2. *Reciprocæ figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.*



Quemadmodum in parallelogrammis AC. BF. & ductis diagonalibus in trian-

gulis A B C. B E F. si sit A B in prima figura ad B G secundæ, sicut reciproce E B secundæ ad B C primæ, illæ dicuntur reciprocæ.

3. Recta A B dicitur secta esse secundum extremam & mediam rationem, cum fuerit ut tota A B ad majus segmentum AC. ita idem majus segmentum A C ad minus segmentum C B.

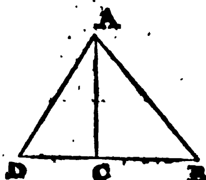


In propositione 11. Libri II. Euclides docuit secare lineam ita ut ▭ sub tota lineà A B & minori segmento C B comprehensum sit æquale □ majoris segmenti A C: quod unum & idem esse cum hac Definitione videri potest ex prop: 30. VI. Unde patet 11. II. hic inter Definitiones reponi.

Cæterum ob multiplicem illius usum Geometris hæc proportio divina dicitur.

4. Al-

4. *Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis A C, ab illius vertice ad ipsam basin vel illius productam demissa.*



Cum mensura cujusque rei debeat esse certa ac determinata, non vero vaga & incerta, etiam distantia puncti alicujus verticalis a linea opposita per certam, & sibi semper æqualem ac minimam mensurari debet lineam. Sic distantia puncti verticalis A a linea seu basi D B, non mensuranda est juxta lineas oblique ductas A D, A B, quia illæ quasi infinitæ duci possunt, nec inter se æquales sunt; sed solummodo per lineam perpendiculariter ductam A C, quæ est certa, unica & minima: quæ hoc in casu semper quæritur. Et hæc perpendicularis A C. dicitur altitudo trianguli A D B, sumpta D B pro basi: quemadmodum sumpta A D pro

basi, perpendicularis ex B ad A D ducta altitudinem exhibebit: ut & sumtâ A B pro basi faciet perpendicularis ex D ad A B demissa.

Quia vero per punctum A duci potest linea parallela ipsi D B, illa altitudo dicitur esse in iisdem parallelis; unde si duo triangula sint in eadem altitudine idem est ac si dicantur esse in iisdem parallelis, ut loquitur Euclides Lib. I.

5. *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.*

Supra notavimus rationem nihil aliud revera esse quam modum continendi quo una quantitas aliam quantitatem continet vel ab alia continetur; quique non clarius, quam per fractionem exprimatur.

Si ergo datæ sint duæ rationes 2 ad 3, & 4 ad 5, illæ ad fractiones redactæ sic stabunt $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, quæ si inter se multiplicentur, obtinebitur $\frac{8}{15}$ seu ratio 8 ad 15. pro quæsita ratione quæ ex duabus datis com-

composita est. Sic ratio quæ ex dupla & tripla, seu ex duabus rationibus 2 ad 1 & 3 ad 1, hoc est ex duabus fractionibus $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ composita est, habebitur $\frac{6}{1}$ seu ratio 6 ad 1 seu sextupla. Et sic porro de aliis.

Notandum autem est rationum ab Euclide sic dictas quantitates Geometris vulgo dici Denominatores, quæ in fractionum consideratione quotientum nomine venire solent.

Sed minime omittendum putamus rationem $\frac{8}{15}$ seu 8 ad 15 (quæ ex rationibus $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ seu 2 ad 3 & 4 ad 5 componitur) etiam hoc modo posse inveniri.

Fiat 2 — 3 = quilibet numerus 6 / 9.
Tum 4 — 5 = 9 / $\frac{45}{4}$

Dico rationem 6 ad $\frac{45}{4}$ seu utrinque per eundem numerum 4 multiplicando 24 ad 45 esse eandum cum ratione 8 ad 15. Si enim fractio $\frac{24}{45}$ per 3 reducatur ad minimam, obtinebur $\frac{8}{15}$ ut requiritur; unde

patet rationem 6 ad $\frac{45}{4}$ esse compositam ex duabus rationibus 2 ad 3 & 4 ad 5.

A——————————
B————
C——————————
D—————
H————————————
I————
K——

Quæ omnia lineis hac ratione applicari possunt. Datæ sint duæ rationes A ad B. & C ad D, rationem ex istis duabus compositam hoc modo inveniemus.

Fiat A — B = H / I.
Ut & C — D = I / K.

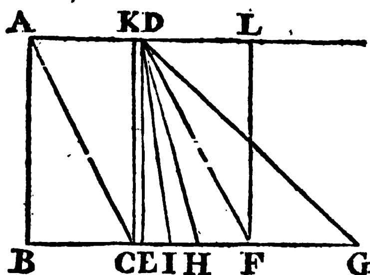
Ratio H ad K exhibebit rationem compositam quæsitam.

Pro H assumere licet quamlibetcunque lineam.

PRO-

PROPOSITIO I.

Triangula ABC. DEF. & parallelogramma BK. EL, in eadem altitudine sive inter easdem parallelas constituta, sunt inter se ut bases BC. EF. hoc est si bases sint æquales figuræ erunt æquales: si bases inæquales figuræ erunt inæquales & quidem juxta rationem basium. Theor. I.



DEMONSTRATIO.

I. Sit basis BC æ EF. Tum triangula ABC. DEF, inter easdem parallelas & super basibus æqualibus constituta inter se sunt a æqualia. a 38. I.

2. Po-

2. Ponatur EG dupla ipsius EF, seu BC.
a 38. 1. Tum erunt duo DEF. DFG [a] æqualia: adeoque totum DEG duplum ipsius DEF hoc est ABC: quia nim. basis EG est dupla ipsius BC.

3. Ponatur EH dimidia baseos EF seu BC. adeoque $\frac{1}{4}$ EG. Erunt duo triangula DEH. DHF [a] æqualia: ergo DEH erit semissis ipsius DEF, hoc est ABC: & quarta pars ipsius DEG.

4. Ponatur EI ∞ $\frac{1}{2}$ EH. seu $\frac{1}{4}$ EF. seu $\frac{1}{8}$ EG. similiter erit triangulum [a] DEI ∞ DIH. adeoque DEI erit ∞ $\frac{1}{2}$ DEH. seu $\frac{1}{4}$ DEF hoc est ABC. seu $\frac{1}{8}$ DEG.

Et sic porro in infinitum.

Ergo absolute triangula se habent ut illorum bases.

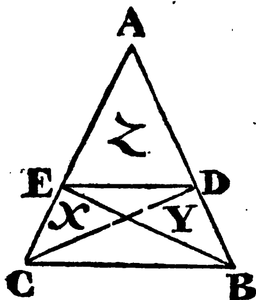
Similiter etiam parallelogramma, cum
b 34. 1. dupla [b] sunt triangulorum.

PRO-

PROPOSITIO II.

1. *Si in triangulo uni lateri CB parallela ducatur ED, hæc proportionaliter secabit latera AC AB. (hoc est ut sit AE — EC = AD / DB.* Theor. 2.

2. *Et si recta ED secuerit latera AC. A B proportionaliter, erit illa reliquo lateri CB parallela.*



DEMONSTRATIO.

1 Pars. Ducantur rectæ CD. BE. eruntque triangula X & Y in iisdem parallelis DE. CB & eadem basi ED, ergo inter se [a] æqualia. Triang. [a] 37. 1.

b 1. VI. Tri. Z — Tri. X [b] ∺ baſ: AE / baſ: EC.
ſeu Y

Atqui etiam

c 11. V. Tr: Z — Tr: Y [b] ∺ baſ: AD / baſ: DB.

Ergo [c] AE — EC ∺ AD / DB.

2 Pars. Eſt ex hypotheſi.

AE — EC ∺ AD / DB.

Atqui

AE — EC ∺ Z / X.
Et AD — DB ∺ Z / Y. } 1. VI.

Ergo hiſce rationibus ſubſtitutis.

Erit Z — X ∺ Z / Y.

e 39. I. d 14. V. Adeoque [d] triang. X ∞ Y & quia ſunt in eadem baſi ED, erunt inter [e] parallelas ED. CB.

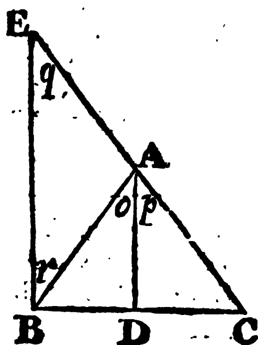
Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO III.

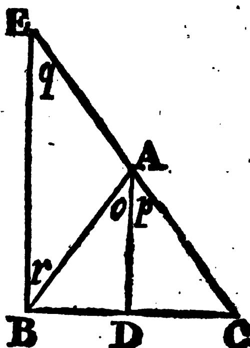
1. *Si in triangulo ABC, recta* Theor. 3.
A D angulum A bifariam secans, etiam secet basin BC, habebunt basis segmenta BD. DC eandem rationem, quam reliqua latera BA. AC.

2. *Et si basis segmenta BD. DC eandem habeant rationem quam reliqua latera BA. AC, recta AD. basin secans, etiam angulum oppositum A secabit bifariam.*



DEMON-

DEMONSTRATIO.



a 31. I. Pars I. Ex B ducatur BE parallela DA, & producatur CA, usque ad occursum parallelæ in E: eruntque propter parallelas EB. DA.

Ang. O ∞ R. quia sunt alterni.
Ang. P ∞ Q. externus interno] 29. I.

Atqui O ∞ P ex hypothesi.

b 6. I. Ergo R ∞ Q. Et latus EA [b] ∞ BA.

c 2. VI. Quare [c] erit $\frac{EA}{BA}$ — AC ⊐ BD/DC

PARS

PARS II.

Est BA — AC ⊐ BD / DC. ex h.
Atqui [d] EA — AC ⊐ BD / DC. d 2. VI.

Ergo 11. V.
BA — AC ⊐ EA / AC.

Adeoque [e] BA ∞ AE & ang. R [f] ∞ Q. e 14. V. f 5. I.
Atqui ang. R ∞ O ⎤
Ut & Q ∞ P ⎦ 29. I.

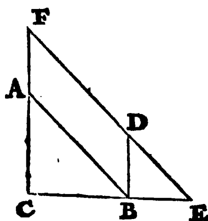
Ergo O ∞ P.

Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

Theor. 4. *Triangula sibi mutuo æquiangula; sunt similia; hoc est [a] etiam latera circa æquales angulos habent proportionalia.*

a Def. 1. VI.



DEMONSTRATIO.

Bases CB, BE colloca in directum: quia jam angulus ACB ∞ DBE, ex hypothesi, eruut [b] CA & BD parallelæ, ut & AB. DE. quia ang. ABC etiam ponitur ∞ E.

b 28. I.

Producantur CA & ED in F, eritque AFDB parallelogrammum, adeoque FA [c] ∞ DB & FD ∞ AB.

c 34. I.

Quia

Quia in triangulo FCE linea AB est parallela FE erit [d] d 2. VI.

$$AC - \frac{AF}{DB} = CB / BE.$$

Et permutando. 16. V.

$$AC - CB = DB / BE.$$

Deinde

Quia in triangulo EFC linea DB est parallela FC.

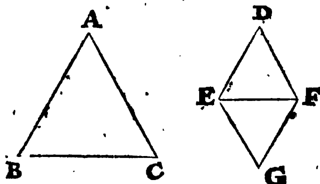
$$\text{Erit } \frac{FD}{AB} \text{ d} - DE = CB / BE.$$

Et vicissim. 16. V.

$$AB - BC = DE / EB.$$

PROPOSITIO V.

Theor. 5. *Si duo triangula ABC. DEF, latera circa omnes angulos habeant proportionalia, erunt æquiangula, eosdem angulos A & D, B & E, C & F habebunt æquales, quibus homologa latera subtenduntur.*



DEMONSTRATIO.

a 23. 1. Ad punctum E fiat a angulus FEG ∞ B. ut & ad punctum F angulus EFG ∞ C. eritque tertius G æqualis tertio A.

Quare in triangulis similibus ABC. GEF.

AB — BC = GE / EF.

Atqui etiam per propositionem.

AB — BC = DE / EF.

Ergo [b] GE — EF = DE / EF. b 11. V.

Adeoque [c] GE ꝏ DE. c 14. V.

Eodem modo ab altera parte etiam probatur esse.

GF ꝏ DF.

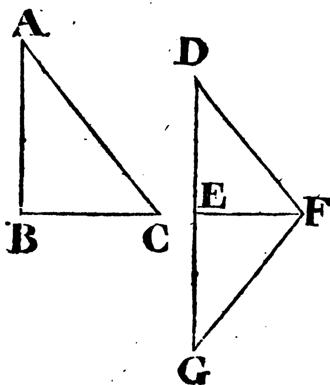
Adeoque triangula DEF. GEF habent omnia latera æqualia, singula singulis. ergo per 8. I.

Ang. DEF ꝏ GEF ꝏ B.
Ang. DFE ꝏ GFE ꝏ C.
Ang. D ꝏ G ꝏ A.

Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

Theor. 6. *Si duo triangula ABC. DEF, habeant unum angulum B æqualem uni E, & latera circa eum proportionalia, (hoc est AB ad BC ut DE. ad EF) erunt triangula sibi mutuo æquiangula.*



DE-

DEMONSTRATIO.

Ad puncta E, & F fiant anguli FEG. EFG æquales angulis B. (hoc eſt DEF) & C. eritque tertius G æqualis tertio A. Et triangula ABC. GEF ſimilia, [a] a 3. I 2.
[b], adeoque b 4. VI.

AB — BC ⫧ GE / EF.

Atqui etiam per propoſitionem.
AB — BC ⫧ DE / EF.

Ergo [c] GE — EF ⫧ DE/EF. c 11. V.
Adeoque [d] GE ∞ DE. d 14. V.

Ergo duo triangula DEF. GEF ſe habent juxta quartam I. adeoque

Ang. DEF ∞ GEF ∞ B.
Ang. DFE ∞ GFE ∞ C.
Ang. D ∞ G ∞ A.

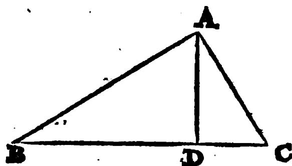
Q. E. D.

Theor. 7. **PROPOSITIO VII.**

Vix ullius est usus.

Theor. 8. **PROPOSITIO VIII.**

In triangulo rectangulo ABC, perpendicularis AD ab angulo recto in basin ducta, secat triangulum in duo triangula ADB. ADC quae erunt & toti & inter se similia.



DEMONSTRATIO.

Pars I. In Triangulis BAC. ADB.
Ang. B est communis.
Ang. BAC ꝏ ADB, quia uterque rectus
b Ergo C ꝏ BAD.

Ad-

Adeoque [a] triang. BAC ADB. similia. a 4. VI.
Deinde in triangulis BAC. ADC.
Ang. C est communis.
Ang. BAC ꝏ ADC quia uterque rect.

---

b Ergo B ꝏ CAD. b 32. I.
Adeoque [a] triang. BAC. ADC similia.

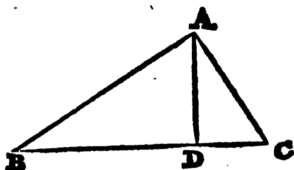
II. Pars. Triangulum ADB est simile ipsi BAC.
Triangulum ADC est simile eidem BAC.

Ergo Triangula ADB. ADC inter se sunt similia per 21. VI. quæ ab hac non dependet.

COROLLARIUM I.

Perpendicularis ab angulo recto in basin ducta, est media proportionalis inter duo basis segmenta.

DEMONSTRATIO.



Duo triangula BDA. ADC, sunt æquiangula.

a 4. VI. Ergo [a] BD — DA = DA/DC.

Adeoque DA est media proportionalis inter BD. DC.

COROLLARIUM II.

Utrumlibet laterum angulum rectum comprehendentium est medium proportionale inter totam basin & illud segmentum basis quod sumpto lateri adjacet.

DE-

DEMONSTRATIO.

In triangulis similibus ABC. ADC.
a BC — CA ⫤ AC / CD.
Et in triangulis similibus ACB. ADB
a CB — BA ⫤ AB / BD.

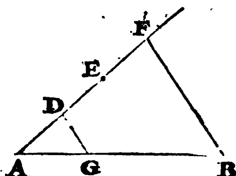
SCHOLIUM.

In deducendis triangulorum proportionibus bene notandum est, ordine procedendùm esse ab angulis æqualibus circa æquales anguios ad æquales angulos.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Probl. I. *A data recta AB imperatam partem abscindere.*



CONSTRUCTIO.

Sit auferenda pars tertia.

1. Rectæ AB sub quolibet angulo adjunge rectam AF, inque illa sume circino tres partes æquales AD. DE. EF.

2. Ductæ FB ex D ducatur parallela DG.

Dico AG esse quæsitam tertiam partem rectæ AB.

DEMONSTRATIO.

In triangulo FAB lateri FB parallela est DG.

a 2. VI. Ergo [a] FD — DA = BG / GA.

Et componendo 18. V.

FA — DA = BA / GA.

Atqui FA est tripla ipsius DA.

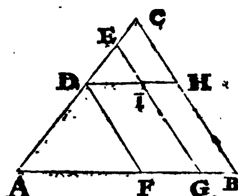
Ergo BA etiam est tripla ipsius GA.

Adeoque AG est tertia pars lineæ AB.

PRO-

PROPOSITIO X.

Datam rectam AB similiter secare ac data alia recta AC secta fuerit in D & E. Probl. 2.



CONSTRUCTIO.

1. Jungantur datæ lineæ ad A.
2. Ductâ CB ex punctis D & E ducantur duæ rectæ DF. EG parallelæ ipsi CB.

Dico factum esse quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

In triangulo AEG lineæ EG. DF sunt parallelæ, [a] quia eidem lineæ CB ductæ sunt parallelæ. a 30. I.

Ergo [b] AF — FG ⊐ AD / DE. b 2. VI.

Deinde ex D ducta DH parallela AB, erit DI ∞ FG [c] & IH ∞ GB. c 34. I.

Erit-

Eritque in triangulo DHC.

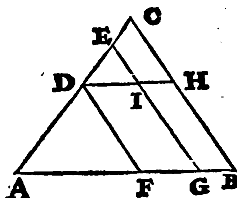
DI. f. FG — IH. f. GB = DE / EC.

Adeoque partes AF FG. GB, sunt proportionales partibus AD. DE. EC.

Q. E. F.

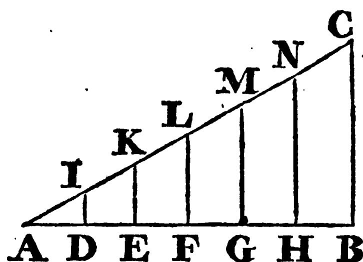
SCHOLIUM.

Hinc facile patet ratio dividendi lineam datam in quotcunque libet partes æquales: sumendo scilicet in linea datæ adjuncta, tot partes æquales in quot linea data dividenda sit: & extremitates lineæ utriusque recta conjungendo; si tum a divisionibus intermediis ducantur rectæ parallelæ lineæ jam ductæ; illæ quæsitam facient divisionem. Ex. Gr. sit linea AB dividenda in sex partes æquales.



CON-

CONSRUCTIO.



1. Ipsi AB junge sub quolibet angulo rectam A C.

2. In linea A C sume sex partes æquales AI. IK. KL. LM. MN. NC.

3. Duc rectam C B, illique parallelas NH. MG. LF. KE. ID.

Dico lineam A B sectam esse in sex partes æquales AD. DE. EF. FG. GH. HB.

DEMONSTRATIO.

Per propositionem 10. linea A B secta est similiter ac A C.

Atqui linea A C secta est in sex partes æquales.

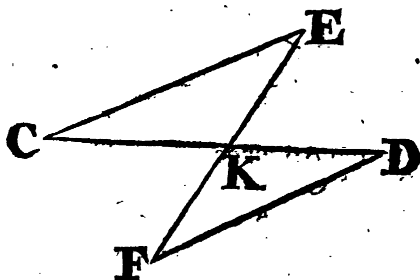
Ergo etiam AB in sex æquales partes secta erit.

SCHOLIUM. II.

Haud inconcinne linea data CD poterit dividi in ratione datarum linearum A. B.

CON-

CONSTRUCTIO.



1. Ex C ſub quolibet angulo ducatur recta CE ꝏ datæ A.

2. Et ex D recta DF, parallela ipſi CE, & ꝏ datæ B.

3. Jungatur EF.

Dico rectam CE in K ſectam eſſe in ratione A ad B.

DEMONSTRATIO.

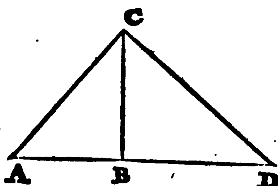
In tri. CKE. DKF
Ang. C ꝏ D
E ꝏ F } 29. I.
K ꝏ K

Ergo erit per 4. VI,
CE. ſ. A — CK = DF ſ. B / DK.
& permutando
A — B CK / KD;

PRO-

PROPOSITIO XI.

Datis duabus rectis A B. B C. tertiam proportionalem invenire. Probl. 3.



CONSTRUCTIO.

1. Datas rectas conjunge in angulo recto A B C.

2. Ad ductæ rectæ A C punctum C excita perpendicularem C D.

3. Lineam A B produc usque ad occursum istius perpendicularis in D.

Dico BD esse quæsitam proportionalem.

DEMONSTRATIO.

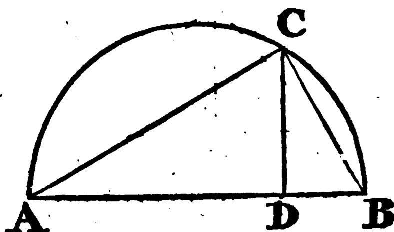
Triangulum ACB est rectangulum per construct. & C B perpendicularis ex angulo recto ad basin ducta: quæ [a] est media proportionalis inter AB & BD. Adeoque B D erit tertia quæsita. [a] 1 Cor. 8. VI.

Q. F. E.

SCHOLIUM.

Si AB ſit major quam BC, haud inconcinna erit talis

CONSTRUCTIO.



1. Super AB deſcribe Semicirculum ACB.
2. In illo accommodetur ſecunda data BC.
3. Ex C demitte perpendicularem CD.

Dico DB eſſe tertiam proportionalem quæſitam.

DEMONSTRATIO.

Ducta AC erit ACB triangulum rectangulum (31. III.)

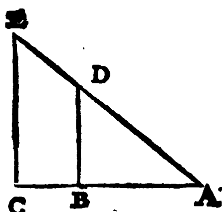
Ergo erit AB — BC = BC / BD. per 2 Cor. 8. VI.

Adeoque BD eſt tertia quæſita.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis AB. BC. AD Probl. 4.
quartam proportionalem DE *invenire.*



CONSTRUCTIO.

1. Datarum duas quaslibetcunque AB. BC colloca in directum.

2. Tertiam AD conjunge ad punctum A, & duc rectam DB.

3. Ex C duc CE parallelam BD, quæ productæ AD occurrat in E.

Dico DE esse quæsitam quartam proportionalem.

DEMONSTRATIO.

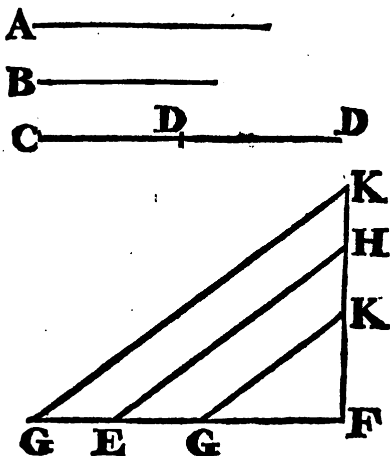
In triangulo ACE lateri CE ducta est parallela BD.

Ergo [a] AB — BC = AD / DE. [a] 2. VI.

Adeoque erit DE quarta proportionalis.

Q. E. F.

Alia Constructio.



Datæ sint tres lineæ A. B. CD, quæ est vel < vel > A.

1. Lineæ E F ∞ A junge F H ∞ B sub quolibet angulo, ducaturque EH.

2. In linea FE sume FG ∞ tertiæ CD. & ex puncto G ducatur GK parallela ipsi E H.

Dico lineam FK esse quartam quæsitam scil. F K supra H, si tertia C D sit major prima A: At vero F K infra H si sit C D > A.

DE-

DEMONSTRATIO.

Facile ex constructione patet triangula EFH. GFK esse similia: quare erit per 4. VI.

EF — FH ⫽ GF / FK.

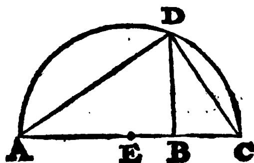
Hoc est

A — B ⫽ CD / ad quartam FK.

Q. D. E.

PROPOSITIO XIII.

Datis duabus rectis AB. BC mediam proportionalem BD invenire. Probl. 5.



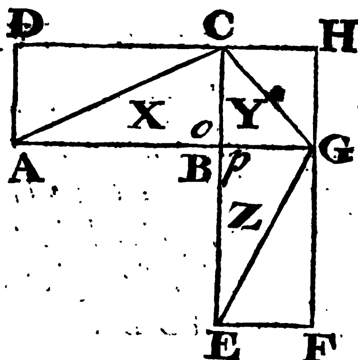
CONSRUCTIO.

1. Datas lineas AB. BC colloca in directum.

2. Super tota AC describe Semicirculum.

3. Ex B excita perpendicularem BD usque ad Semicirculum.

Dico illam esse mediam quæsitam.



DEMONSTRATIO.

a 7. V. 1 Pars. Par.[a] X — Par. Y = Z / Par. Y.
Atqui X — Y = AB / BG.
Et Z — Y = EB / BC. } 1. VI.

Ergo substitutis istis rationibus.
AB — BG = EB / BC.

2 Pars. AB — BG = EB / BC.
Atqui AB — BG = X / Y.
Et EB — BC = Z / Y. } 1. VI.

Ergo istis rationibus substitutis.
X — Y = Z / Y.

b 14. V. Adeoque[b] Par: X ∞ Par: Z.

PRO-

PROPOSITIO XV.

1. *Æqualia triangula* X. Z, *quæ unum angulum* O *uni angulo* P *æqualem habent; etiam latera circa æquales angulos habebunt reciproce proportionalia.* (*hoc est AB ad BG, ut* EB *ad BC.* Theor. 10. Vide fig. præcedentem.

2. *Et si latera sic habent reciproca, triangula sunt æqualia.*

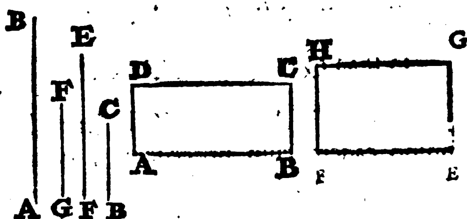
DEMONSTRATIO.

Ductis rectis AC. CG. GE. hæc est omnino eadem cum præcedente; quoniam [a] triangula sunt semisses parallelogrammorum, & triangula cum parallelogrammis eadem habent latera quæ demonstrationem ingrediuntur. a 34. I.

PROPOSITIO XVI.

Theor. 11. *2. Si quatuor rectæ A. G. F. B proportionales fuerint, rectangulum sub extremis A & B. erit æquale rectangulo sub mediis.*

2. Et si rectangulum sub extremis sit æquale rectangulo sub mediis, illæ quatuor rectæ proportionales erunt.



DEMONSTRATIO.

1 Pars Fiat ▭ A C sub extremis & F G sub mediis: illa habent angulum B ∞ E,. & latera reciprica, nimir: AB — FE = reciproce EG / BC.

a 14 VI. Ergo illa [a] ▭la sunt æqualia.

2 Pars. ▭la AC. FG habent angulum

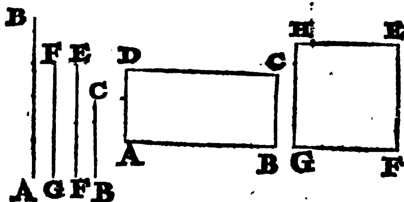
b 14. VI. B ∞ E. & sunt æqualia: [b] Ergo habent latera reciproce proportionalia.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

1. *Si tres lineæ A. F. B. pro-* Theor. 12.
portionales fuerint, rectangulum sub extremis A & B erit æquale quadrato mediæ F.

2. *Et si rectangulum sub extremis sit æquale quadrato mediæ, tres illæ rectæ proportionales erunt.*



DEMONSTRATIO.

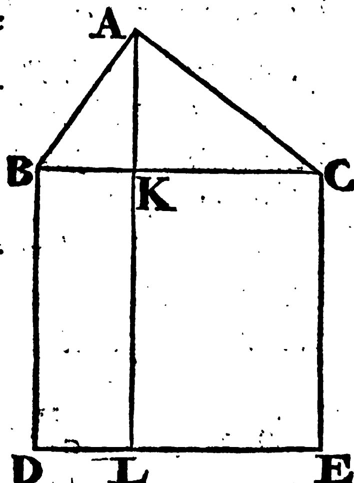
1 Pars. Fiat sub extremis ▭ AC, & a media □ GE. Quæ quia habent an- a 14. VI.
gulum B ꝏ F & latera reciproca scilicet AB ⊸ GF ∷ FE. hoc est GF / BC. a erunt inter se æqualia.

2 Pars. ▭la AC, GE sunt æqualia & habent angulum B ꝏ F. Ergo [a] habent latera reciproca.

SCHO-

SCHOLIUM.

Ex hac proposit: & præcedente 8 facillime demonstratur Pr. 47. I. hoc modo.



PRÆPARATIO.

Super BC constituatur □ BE, & ex A ducatur AL parallela BD vel CE.

DEMONSTRATIO.

Lineæ BC. AC. CK sunt proportionales. per 8. VI.

Ergo ▭ BC. CK ꝏ □ AC.
▭ EK.

Deinde Lineæ BC. AB. BK. sunt proport:

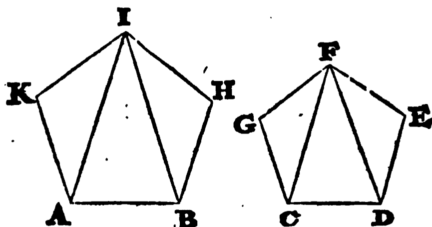
Ergo ▭ BC.BK ꝏ □ AB ⎫
▭ LB ⎬ 17.VI.] A.
Supra ▭ EK ꝏ □ AC ⎭

▭la EK ✠ LB ꝏ □ AB ✠ □ AC,
□ EB

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Super data recta AB describere polygonum ABHIK, quod dato polygono CDEFG sit simile similiterque positum. Probl. 6.



CONSTRUCTIO.

1. Datum Polygonum rectis FC. FD divide in triangula.

2. Super AB factis angulis [a] BAI. ABI æqualibus angulis DCF. CDF. erit [b] tertius æqualis tertio. adeoque [c] triangulum IAB simile triangulo FCD. a 23. I. b 32. I. c 4. VI.

3. Eodem modo super lateribus IA: IB, fiant triangula IKA. IHB. æquiangula, adeoque & similia triangulis FGC. FED. Dico ABHIK esse polygonum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Pro angulis.

Facile patet per constructionem angulos-

los unius polygoni esse æquales angulis alterius. nim.

K ∞ G.
Tres ad I ∞ ad F tribus.
H ∞ E
Duos ad B ∞ ad D duobus.
Duos ad A ∞ ad C duobus.

Ergo omnes anguli sunt æquales, adeoque duo polygona sunt æquiangula, & similiter posita.

Pro lateribus.

In triangulis similibus IKA. FGC: ut & IAB. FCD.

Erit KA — AI ∷ GC / CF.
Et BA — AI ∷ DC / CF. } 4. VI.

Erit per 11. & 16. V.
KA — AB ∷ GC / CD.

Deinde in triangulis similibus IAB. FCD, ut & IHB. FED.

Erit AB — BI ∷ CD / DF.
Et HB — BI ∷ ED / DF. } 4. VI.

Ergo per 11. & 16.
AB — BH ∷ CD / DE.

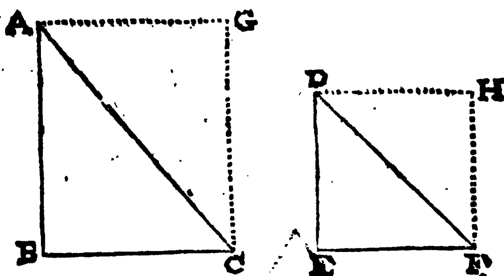
Et eodem modo demonstratur latera circa reliquos angulos esse proportionalia: Ergo polygona sunt similia.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula ABC. DEF inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum BC. EF. Theor. 13.



DEMONSTRATIO.

AB [a] — DE = BC / EF ⎤ Mult. [a] 4. v.
BC — EF = BC / EF ⎦

▱lum [b] ▱lum Quadr: Quadr: [b] 4. v.
BG — EH = BC / EF.

Adeoque ▱lorum BG. EH sumtis semissibus, erit.

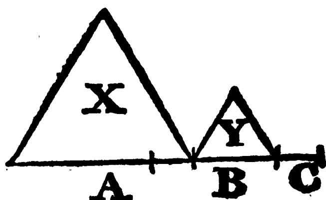
Triang: [c] Triang: Quadr: Quadr: [c] 15. v.
ABC — DEF = BC / EF.

NB.

NB. Perinde eſt ſive anguli B & E ſint recti ſive obliqui; quia latera A B. DE, ſi non ſint perpendicularia, ſemper ut talia conſiderari poſſunt.

COROLLARIUM.

Si tres lineæ A. B. C. fuerint proportionales, erit triangulum X ſupra primam ad triangulum Y priori ſimile ſupra ſecundam, ut prima linea A ad tertiam C.



DEMONSTRATIO.

Tres lineæ A. B. C. ſunt proportionales.

a 10. Def. V. Ergo A — C [a] in duplicata ratione A / B.

b 19. VI. Atqui X — Y [b] etiam in dupl: rat: A / B.

---

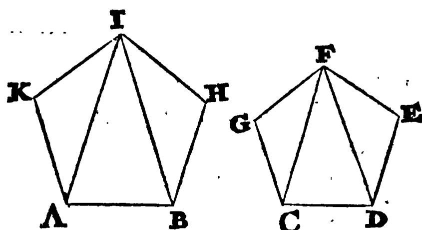
c 11. V. Ergo X — Y [c] = A / C. Q. D. E.

PRO-

PROPOSITIO XX.

1. *Polygona similia ABHIK. CDEFG dividuntur in triangula, quæ sunt numero æqualia, similia & totis homologa.* Theor. 14.

2. *Polygona inter se sunt in ratione duplicata laterum homologorum AB. CD.*



DEMONSTRATIO.

1 Pars: Ductis rectis IA. IB. ut & FC. FD. polygona erunt divisa in triangula.

Quod autem illa triangula sint numero æqualia, patet ex Scholio prop. 32. I. quia nim. polygona æque multa habent latera.

Quod sint similia sic probatur.

In triangulis IKA FGC.

Ang. K ∞ G. & latera circa illos proportionalia.

a 6. VI. b 4. VI. Ergo triangulum[a] IKA. est æquiangulum[b] & simile FGC.

Eodem modo in triangulis IHB FED.

Ang. H ∞ E, & latera circa illos proportionalia.

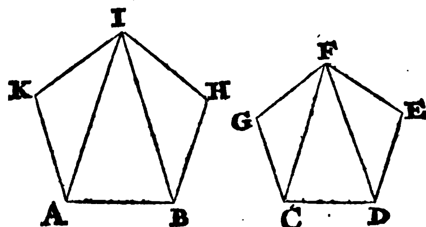
Ergo triangulum IHB est æquiangulum & simile FED.

Deinde ang.	KAB ∞ GCD.	S
	KAI ∞ GCF.	
	IAB ∞ FCD.	
Simili modo	IBA ∞ FDC.	
Ergo tertius	AIB ∞ CFD.	

Ergo triangulum IAB est æquiangulum & simile FCD.

Quod sint totis homologa, hoc est quod ita sit quodlibet triangulum in uno polygono ad suum correspondens in altero. Ut totum polygonum ad totum polygonum, patebit ex parte secunda.

2 Pars. Triangula IAB, FCD probata sunt similia.



Ergo

Ergo [c] IA — FC = AB/CD. c 4. VI.
Ut & IB — FD = AB/CD.

Tum.

Triangula [d] IKA. FGC. sunt in duplicata d 19. VI.
ratione laterum IA. FC.
hoc est AB. CD.

Et triangula IHB. FED [d] in duplicata
ratione laterum IB. FD.
hoc est AB. CD.

Ut & triangula IAB. FCD in duplicate ratione laterum AB. CD.

Ergo [e] omnia triangula unius polygoni ad omnia triangula alterius polygoni sunt in duplicata ratione laterum homologorum AB. CD. e 12. VI.

Atqui omnia triangula istorum polygonorum constituunt tota Polygona.

Ergo ipsa polygona sunt in duplicata ratione laterum homologorum. AB. CD.

Cum autem etiam singula triangula unius polygoni ad singula triangula alterius polygoni habent rationem duplicatam eorundem laterum AB. CD; patet ista triangula totis polygonis esse homologa.

Q. E. D.

COROLLARIUM.

Si fuerint tres rectæ proportio-

nales, polygonum super prima descriptum se habebit ad simile polygonum super secunda; vel polygonum super secunda se habebit ad polygonum super tertia, ut prima proportionalis ad tertiam.

DEMONSTRATIO.

Hæc est fere eadem cum demonstratione corollarii prop: præcedentis.

SCHOLIUM.

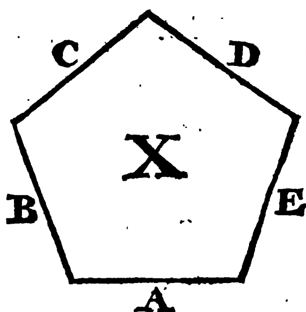
Commode hic demonstratur haud inelegans Theorema.

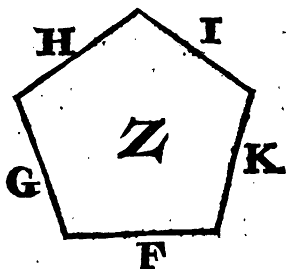
Similium polygonorum X & Z, circuitus ABCDE: FGHIK, cum lateribus homologis A & F, sunt in eadem ratione.

DEMONSTRATIO.

A — F = A / F.
B — G = A / F.
C — H = B / G.
hoc est A / F.
D — I = C / H. } Def. 1. VI.
hoc est A / F.
E — K = D / I.
hoc est A / F.

Ergo





Ergo per 12. V, additis omnibus terminis primis, ut & omnibus secundis

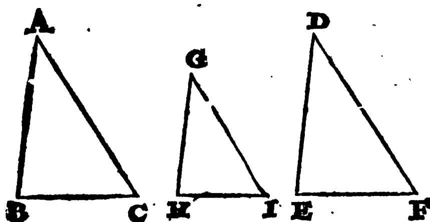
$$\frac{A+B+C+D+E \dots F+G+H+I+K = A/F}{\text{hoc est circuitus X ad circuitum Z.}}$$

Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

Theor. 15.

Figuræ ABC. GHI, quæ eidem figuræ DEF sunt similes, illæ & inter se similes erunt.



DEMONSTRATIO.

Angulus A ∞ D ∞ G.
B ∞ E ∞ H.
C ∞ F ∞ I.

Ergo figuræ ABC. GHI. sunt æquiangulæ; & habent larera circa æquales proportionalia, quia illa habent proportionalia lateribus figuræ DEF. Ergo & ipsæ a sunt similes.

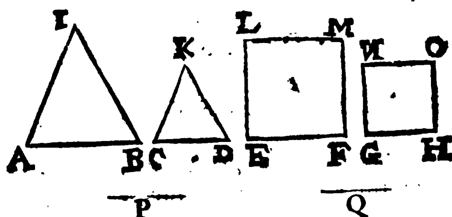
a 1 Def. VI.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

1. *Si quatuor rectæ AB. CD. EF. GH. proportionales fuerint, figuræ similes ABI. CDK & LF. NH proportionales erunt.* Theor. 16.

2. *Et si a rectis lineis figuræ similes descriptæ sint; istæ rectæ proportionales erunt.*

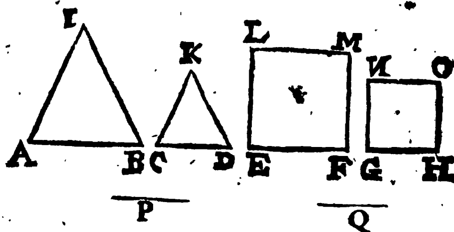


DEMONSTRATIO.

PARS I.

Datæ sunt AB — CD = EF / CD. a 19. VI.
Tr. ABI [a]— Tr. CDK in duplic. rat. AB/CD.
hoc EF/GH.
Atqui □LF [b]— □NH etiam in d. r. EF/GH. b 20. VI.
Ergo.
Tr. ABI [c]— Tr. CDK = □LF / □NH. c 11. V.

PARS II.



AB — CD in subdup. rat. Tr. ABI / Tr. CDK.
hoc est □ LF / □ NH.
Atqui EF — GH etiam in subd. r. □ LF / □ NH
Ergo.
AB — CD = EF / GH.

Alia DEMONSTRATIO.

Duabus rectis prioribus AB. CD, quæratur tertia proportionalis P. a
a 11. VI.

Ut & duabus posterioribus EF. GH, tertia proportionalis Q. a

PARS I.

AB — CD = EF / GH.
seu
CD — P = GH / Q.
Erit ex æqualitate ordinata
b 22. V. AB b — P = EF / Q.

Hoc

Hoc est

Fig: ABI	−	Fig: CDK	=	Fig: EM	/	Fig: GO.	c 1 Cor. 19. & 20. VI.

PARS II.

Fig. ABI	−	Fig: CDK	=	Fig: EM	/	Fig: GO.

Hoc est

AB − P = EF / Q.

Et invertendo Proportionem secundam Partis I.

P − CD = Q / GH.

Erit rursus ex æqualitate ordinata

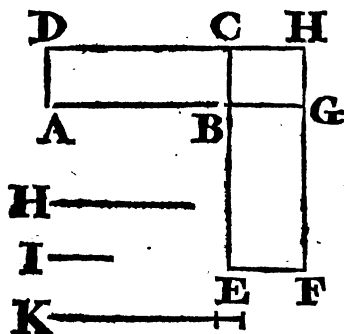
AB − CD = EF / GH.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

Theor. 17.

Æquiangula parallelogramma AC. BF. inter se habent rationem, compositam ex rationibus laterum AB ad BG & CB ad BE.



DEMONSTRATIO.

Fiat AB — BG ⊐ H qualibet / I.
Et CB — BE ⊐ I / K.

Erit ratio H ad K composita ex rationibus AB ad BG & CB ad BE. vide dicta ad 5 Def. VI.

Demonstrandum ergo est esse parallelogr. AC — BF ⊐ H / K.

Quod

Quod ſic probo.

AC — BH ⊐ [a] AB / BG. BH — BF [a] ⊐ CB / BE.
H — I ⊐ [b] AB / BG. I — K [b] ⊐ CB / BE.

Ergo AC — BH [c] ⊐ H / I. BH — BF ⊐ I / K.

Ergo per 11. V.

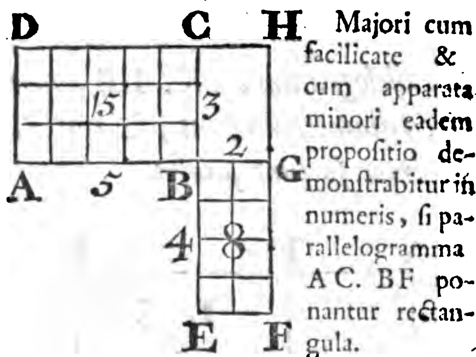
AC — H ⊐ BF / K.

Et permutandò 16. V.

AC — BF ⊐ H / K. Q. E. D.

a 1. VI.
b per conſtr.
c 11. V.

SCHOLIUM.



Majori cum facilitate & cum apparatu minori eadem propoſitio demonſtrabitur in numeris, ſi parallelogramma AC. BF ponantur rectangula.

Sit ▱li AC latus AB ∞ 5.
BC ∞ 3.
[c] Erit Area ∞ 15.
Deinde ▱li BF latus BG ∞ 2.
Latus BE ∞ 4.
Erit Area ∞ 8.
Ergo ▱ AC — ▱ BF ⊐ area 15 / ar. 16

c 1 Def. II.

Atqui ratio compoſita ex rationibus 5 ad

d 5 Def. VI. ad 2 & 3 ad 4. etiam dat d $\frac{15}{8}$ seu rationem 15 ad 8.

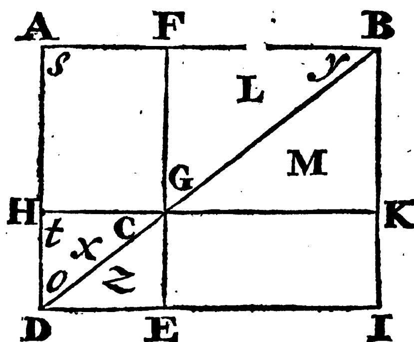
Ergo ratio ▭ AC — ▭ BF est composita ex dictis rationibus 5 ad 2 & 3 ad 4.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

Theor. 18.

In omni parallelogrammo AI, parallelogramma FK. HE, quæ circa diametrum sunt, & toti AI & inter se sunt similia.



DE-

DEMONSTRATIO.

In triangulis D A B & X.

Angulus O eſt communis.

S [a] ∞ T. a 29. I.

Ergo Y [b] ∞ C. b 32. I.

Adeoque triangula D A B & X ſunt æquiangula & ſimilia.

Eodem modo probatur triangula D I B & Z eſſe ſimilia.

Ergo AD — DB = HD / DG. } 4. VI.
Et DB — DI = DG / DE. }

Eritque ex æquo 22. V.

AD — DI = HD / DE.

Similiter etiam probatur reliqua latera eſſe proportionalia: Ergo Parallelogramma A I. H E, ſunt ſimilia.

Eodem modo etiam demonſtratur AI. & FK eſſe ſimilia.

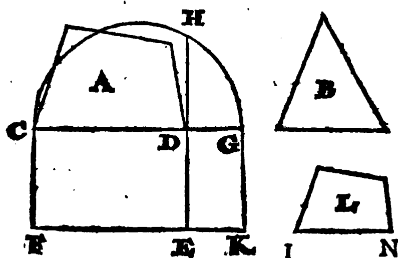
Ergo HE & FK [c] ſunt inter ſe ſimilia. c 21. VI.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Probl. 7. *Constituere rectilineum L, quod sit simile similiterque positum dato rectilineo A, & æquale alteri dato B.*



CONSTRUCTIO.

1. Ad dati rectilinei A latus CD,
a 45. I. fiat ▭ CE ∞ [a] ipsi A.
b 44. I. 2. Super DE fiat ▭ DK ∞ B. [b]
c 13. VI. 3. Inter CD & DG quæratur [c] media proportionalis DH.
4. Super DH seu ipsi æquali IN, de-
d 18. IV. scribatur rectilineum L [d] simile ipsi A.

Dico L esse rectilineum quæsitum.

DE-

DEMONSTRATIO.

Per constructionem sunt proportionales CD. IN. DG.

Ergo [e] CD — DG ≍ A / L. e Cor.

Atqui [f] CD — DG ≍ ⊏ CE / ⊏ DK. 19. VI. f 1. VI.

Ergo [g] A — L ≍ ⊏ CE / ⊏ DK. g 11. V.

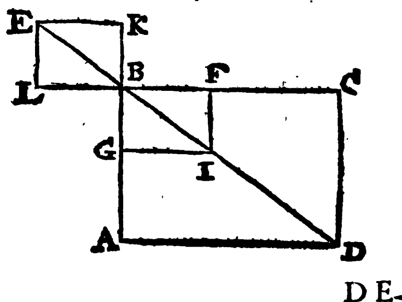
Atqui A ∞ ⊏ CE.

Ergo L ∞ ⊏ DK ∞ B.

Cum autem L per constructionem sit simile A, patet L esse rectineum quæsitum.

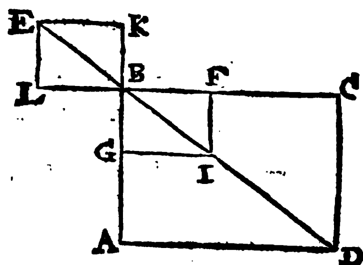
PROPOSITIO XXVI.

Parallelogramma similia AC. GF, habentia communem angulum B, circa eandem diametrum BD consistunt. Theor. 19.



DE-

DEMONSTRATIO.



Parallelogrammi GF ducta diameter IB producatur, tum productis AB ut sit BK ∞ BG; & CB, ut sit BL ∞ BF, compleatur parallelogrammum LK, quod erit idem cum GF, & cum illo circa eandem lineam erit constitutum.

Deinde parallelogrammi AC ducatur Diameter BD.

Quia jam parallelogramma AC, LK ponuntur similia, etiam illorum dimidia, sc: triangula DAB. BLE erunt similia: Ergo illa sunt constituta ut latera DA. AB, sint parallela lateribus BL. LE, & latera circa angulos A. L proportionalia: ergo per sequentem 32. VI. (quæ ab hac non dependet) DBE est linea recta:

Ergo duæ bases DB. BE constituunt unam lineam rectam: circa quam consistunt duo parallelogramma AC. LK.

Cum

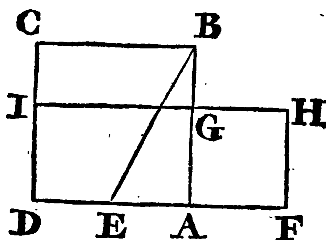
Cum autem parallelogramma G F, L K, etiam circa eandem rectam E I, consistant, patet etiam duo parallelogramma A C. G F. circa eandem rectam, seu Diametrum B D consistere.

PROPOS. XXVII. XXVIII. XXIX.

Hæ prolixæ, tyronibus difficiles, & nullius fere usus sunt.

PROPOSITIO XXX.

Propositam rectam A B extrema ac media ratione secare in G. Probl. 10.



CONSTRUCTIO.

Divide [a] AB in G, ut ▭ sub tota AB a 11. II. & minori segmento BG sit ∞ □ majoris segmenti A G.

Dico factum esse quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

▭ AB. BG ∞ □ AG. AG.

Ergo 17. VI.

 Latera

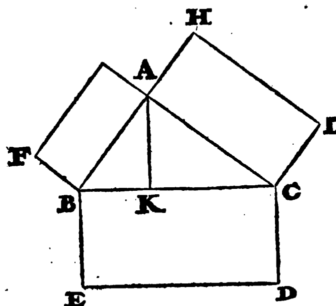
Latera sunt reciproce proportionalia. h. e.

AB — AG = AG / BG.

b 3 Def. VI. Adeoque [b] linea A in media & extrema ratione secta est.

PROPOSITIO XXXI.

Theor. 20. *Si a lateribus trianguli rectanguli BAC, figuræ similes quæcunque describantur, erit illa quæ angulo recto A opponitur æqualis duabus reliquis simul sumptis.*



DEMONSTRATIO.

a 20. VI. Figuræ super AB. AC. BC. ponuntur similes; ergo [a] habent inter se rationem duplicatam laterum homologorum AB. AC. BC, hoc est inter se sunt ut □ta AB. AC. BD. Atqui

Atqui □ta ita sunt inter se ut sit
□ BC [b] ∞ □tis AB. AC. b 47. I.
Ergo figura super BC ∞ figuris super AB. AC.

SCHOLIUM. I.

Quod in prop. 47. I. demonstratum est de solis quadratis hic universim applicatur quibuslibet polygonis similibus.

SCHOLIUM. II.

Potest hæc propositio generaliter, ut etiam involvat prop. 47. I. hoc modo demonstrari.

Sunt proportionales per 2 Cor. 8. VI.
BC. AC. CK. Ut & BC. BA. BK.
Ergo per Coroll. 20. VI.
Fig. ab BC — Fig. ab AC ∷ BC / CK.
Fig. ab BC — Fig. ab BA ∷ BC / BK.

Et invertendo.
CK — BC ∷ Fig. ab AC / Fig. ab BC.
BK — BC ∷ Fig. ab BA / Fig. ab BC.
Erit per 2. V.
BK + KC — BC ∷ Fig. ab AB + Fig. ab AC / Fig. ab BC.
Atqui BK + KC ∞ BC.
Ergo Fig. ab AB & AC ∞ Fig. ab BC.

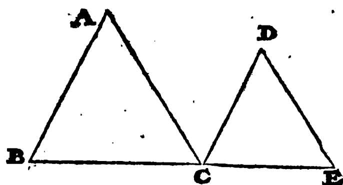
Quare si istæ figuræ sunt quadrata, erit prop. 47. I.

Si vero aliæ figuræ similes erit 31. VI.

PROPOSITIO XXXII.

Theor. 21.

Si duo triangula ABC. DCE ad angulum C conjuncta, duo latera AB. AC habeant parallela lateribus DC. DE & latera circa angulos A. D. proportionalia; tum reliqua illorum latera BC. CE, unam facient lineam rectam.



DEMONSTRATIO.

a 19. I. Angulus A ∞ [a] ACD, propter parallelas AB. DC.

Angulus D ∞ [a] ACD, propter parallelas AC. DE.

Ergo

Ergo ang. A ∞ D.

Cum autem latera circa angulos A & D sint proportionalia, [b] erit triang. ABC æquiangulum triang. DCE. b 6. VI.

Adeoque ang. ABC ∞ DCE ⎤ A.
Ang. A ∞ ACD. ⎦

Ang. A & ABC ∞ toti ACE. ⎤ A.
ACB ACB ⎦

Tres ang. A. ABC. ACB ∞ duobus ACB. ACE.

[c] Atqui tres A. ABC. ACB ∞ 2 Rectis. c 32. I.

Ergo etiam duo ACB. ACE ∞ 2 Rectis.

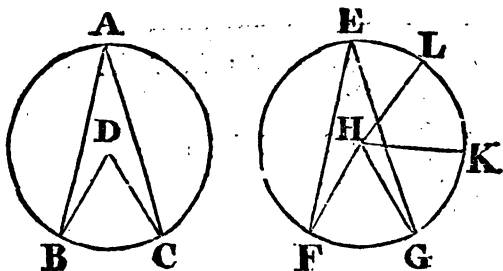
Adeoque BC. CE sibi invicem [d] jacebunt in directum. d 14. I.

PROPOSITIO XXXIII.

Theor. 22.

1. *In æqualibus circulis anguli sive ad peripheriam A & E, sive ad centra D & H, sunt in eadem ratione cum arcubus quibus insistunt BC. FG.*

2. *Et Sectores BDC. FGH, eandem cum arcubus habent rationem.*



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Si anguli D & H ad centra sint æquales; erunt arcus BC, & FG etiam (26. III.) inter se æquales. Fiat

Fiat jam angulus GHK ∞ FHG adeoque FHK duplus FHG hoc est BDC.

Tum arcus GK erit ∞ FG (per eandem 26. III.) & totus FGK duplus ipsius F G hoc B C.

Eodem modo si fiat arcus KHL ∞ GHK s. FHG. ∞ BDC adeoque FHL triplus B D C , etiam probabitur arcum F G K L esse triplum arcus B C.

Ergo hinc universim concludimus si anguli D & H. sint æquales, esse arcus B C. F G æquales: Si anguli D & H sint inæquales, etiam arcus esse inæquales, & hoc juxta quam libet multiplicationem, ut nim. si H sit duplus D etiam arcus F K sit duplus B C: si angulus H sit triplus D. etiam arcus F G K L ipsius B C sit triplus: & sic in infinitum: id quod idem est ac angulos cum arcubus esse in eadem ratione.

Et quia anguli A. E. sunt semisses angulorum D. H., etiam illi cum arcubus eandem habebunt rationem.

PARS II.

Hæc ex prima parte facile deducitur. Sectorum DBC. HFG: anguli G & H sunt æquales: ergo arcus B C. F G: & latera